O'zbekiston aloqa va axborotlashtirish agentligi

Toshkent axborot texnologiyalari universiteti

A.A. Abduazizov, I.R. Faziljanov, Ya.T. Yusupov

SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISH

O'QUV QO'LLANMA

Toshkent 2012

A.A.Abduazizov, I.R. Faziljanov, Ya.T.Yusupov. Signallarga raqamli ishlov berish. O‘quv qo‘llanma. 134 bet.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada signallarni ta’riflash va signallarga raqamli ishlov berish umumlashgan sxemasi, diskret signallarni almashtirish, Fure diskret almashtirishi (FDA) va teskari FDA, Uolsh almashtirishi, Adamar almashtirishi, Veyvlet almashtirishi, Z-almashtirish, korrelyatsiya va o‘ram hamda ularning xossalari, raqamli filtrlarni yaratish asoslari, raqamli filtr koeffisientlarini hisoblash, impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarni loyihalash va uning bosqichlari, impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz raqamli filtrlar texnik xarakteristikalari, impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlar koeffisientlarini hisoblash usullari, turli tezliklarda signallarga ishlov berish asoslari, adaptiv filtrlar haqida asosiy tushunchalar va adaptiv filtrlardan amaliy foydalanish yetarli darajada yoritilgan.

O‘quv qo‘llanma oliy o‘quv yurtlarining “Radiotexnika”, “Televidenie, radioaloqa va radioeshittirish”, “Mobil aloqa tizimlari” ta’lim yo‘nalishlari talabalari uchun mo‘ljallangan.

Taqrizchilar: Nazarov A.M. – TDTU Elektronika va avtomatika fakulteti dekani, t.f.d., professor;
D.A. Davronbekov – TATU Radioaloqa qurilmalari va tizimlari kafedrasi dotsenti, t.f.n.

KIRISH

Hozirgi zamon raqamli radioelektron qurilmalari va tizimlari xalq xo'jaligining turli sohalari (radioaloqa, televidenie, kosmik uchish apparatlari, radioboshqaruvli raketalar, radiolokasion tizimlar, medisina qurilmalari)da keng qo'llaniladi. Ushbu qurilmalarni yaratish va ulardan unumli foydalanish injener-texnik xodimlardan chuqur bilim talab qiladi.

Signallarga raqamli ishlov berish (SRIB) fani Radiotexnika, Mobil aloqa tizimlari, Televidenie, radioaloqa va teleradioeshittirish yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlash o'quv rejasidagi tanlov fanlari qatoriga kiradi.

Fan o'z navbatida Elektr zanjirlar nazariyasi, Diskret matematika, Elektronika va Sxemotexnika, Radiotexnik zanjirlar va signallar, Signallarni shakllantirish va ishlov berish, Raqamli texnika va mikroprotsessor fanlaridan talabalar olgan bilimiga asoslanadi.

Fanni o'rganish jarayonida talabalar quyidagilarni o'rganishi kerak:

- analog signallarni raqamli signallarga aylantirish va raqamli qayta ishlash uslublarining asosiy rivojlanish yo'nalishlari, signallarga raqamli ishlov berish va filtrlash;
- turli ko'rinishdagi signallarni shakllantirish, ularni tahlil etish va sintezlash, raqamli filtrlash va ularga ishlov berishning zamonaviy uslublari;
- signallarga raqamli ishlov berishda z-almashtirish, Uolsh, Adamar, Veyvlet, Fure tez almashtirishlari, raqamli filtrlarni yaratish (loyihalash), impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarni loyihalash, turli tezliklarda signallarga raqamli ishlov berish, tahlil etish va adaptiv filtrlar to'g'risida tushunchaga ega bo'lishlari kerak.

SRIB fani nazariy bilimlarni amaliy tarzda mustahkamlashga imkoniyat beradi. Turli raqamli uzatish va qabullash qurilmalari va tizimlarining asosiy funksional qismlaridagi fizik jarayonlar, ularning asosiy ko'rsatkichlarini optimallash imkoniyatini beradi. Ularni zamonaviy elementlar asosida yaratish ustidagi bilimlarni amalda tadbiq etishga sharoit va ko'nikma yaratadi.

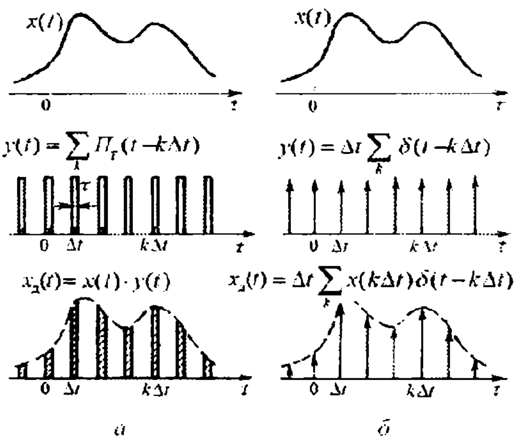
O'quv qo'llanma oliy o'quv yurtlarining "Radiotexnika", "Televidenie, radioaloqa va radioeshittirish", "Mobil aloqa tizimlari" ta'lim yo'nalishlari bo'yicha bakalavrlar tayyorlashga mo'ljallangan bo'lib, undan "Telekommunikatsiya" ta'lim yo'nalishi talabalari ham foydalanishlari mumkin.

1. SIGNALLARNI TA'RIFLASH VA SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISH UMUMLASHGAN SXEMASI

1.1. Signallarning asosiy turlari

Signallarning asosiy turlariga quyidagilar kiradi: analog, diskret va raqamli.

Analog signallar uzluksiz va bo'laklari uzluksiz $x(t)$ funksiya bilan ifodalanadi, bunda funksiyaning o'zi va argumenti har qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin, ya'ni $t \le t \le t$, $x \le x \le x$ (1.1*a*-rasm).



1.1-rasm. Uzluksiz signalni diskretlash

Diskret signal $x\ (t)$ uzluksiz signal $x(t)$ ni diskretizatsiyalash funksiyasi $y(t)$ ga ko'paytirish natijasida hosil qilinadi. Bunda $y(t)$ diskretlash funksiyasi Δt odim bilan davriy takrorlanuvchi kichik davomiyli impulslar ketma-ketligi (1.1*a*-rasm)dan foydalaniladi. Ideal holatda diskretlash funksiyasi sifatida delta-funksiyalar davriy ketma-ketligidan foydalaniladi (1.1*b*-rasm).

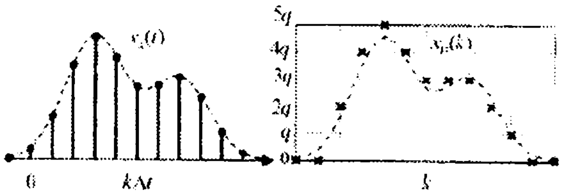
$T = k\Delta t$ oraliq diskretlash davri deb ataladi, unga teskari bo'lgan kattalik diskretlash chastotasi deb ataladi,

$$f = 1/T.$$

Diskret signalning nT vaqtdagi qiymatlari uning oniy qiymatlari deb ataladi. Diskret signal haqiqiy yoki kompleks bo'lishi mumkin. Kompleks signalning haqiqiy va mavhum qismi haqiqiy ketma-ketliklar orqali ifodalanadi

$$x(nT) = x\ (nT) + jx\ (nT).$$

Raqamli signal $x(t)$ kvantlangan panjarasimon funksiya (1.2-rasm), ya'ni qator diskret sathlarni kvantlash sathi mq qiymatlarga nT vaqtlarda ega bo'luvchi panjarasimon funksiyadir. Bunda q – sath bo'yicha kvantlash odimi, m – kvantlash oralig'i tartib raqami, $m = 0, 1, 2, ..., M - 1$, $M = 2$ bo'lib, n – butun musbat son.



1.2-rasm. Raqamli signal

Raqamli signal cheklangan razryadli sonlar ketma-ketligi orqali ifodalanadi. Ba'zan diskret va raqamli signallarni ifodalashda normallashtirilgan vaqt i tushunchasidan ham foydalaniladi, ya'ni

$$i = \frac{t}{T},$$

deb qabul qilinadi va u $t = nT$ bo'lsa, olingan oniy qiymat tartib raqami n ni anglatadi, n-chi diskret vaqt $n = \frac{t}{T} = i$. Normallashtirilgan vaqt tushunchasi diskret signal $x(t)$ ni o'zgaruvchan butun son funksiyasi $x(n)$ shaklida ifodalash imkoniyatini beradi. Bunda diskret signalni ifodalash uchun bir-biriga aynan teng quyidagi ifodalardan foydalanish mumkin:

$$x(n) \text{ va } x(nT);\ x(nT) \equiv x[n].$$

1.2. Diskret signallarning matematik modellari

Diskret signalni quyidagi matematik ifodalar orqali aniqlash mumkin:

– diskret vaqt funksiyasi nT: $x(nT) = x(t)|_{t = nT}$, bunda $n = 0, 1, 2, ...,$ lar analog signalning diskret davriy takrorlanuvchi vaqtdagi oniy (tanlangan) qiymatlariga mos keluvchi normallashtirilgan vaqt;

– olingan qiymat tartib raqami n-funksiyasi: $x(n) = x(nT)|_{T = 1}$, umuman olganda vaqt bilan to'g'ridan-to'g'ri bog'lanmagan;

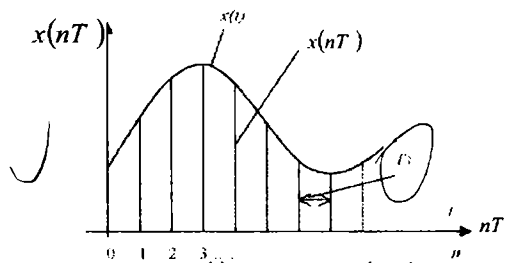
– uzluksiz vaqt funksiyasi:

$$x(t) = x(t) f_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \qquad (1.1)$$

analog signal $x(t)$ ni diskretlash funksiyasi $f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ ga ko‘paytirish natijasida quyidagi cheksiz qisqa davomiyli impulslar davriy ketma-ketligi uchun ifodani olamiz:

$$\delta(t - nT) = \begin{cases} \infty, & t = nT, \\ 0, & t \neq nT \end{cases}$$

Diskret signallar tanlash tartib raqami n yoki diskret vaqt nT funksiyasi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin (1.3-rasm).



1.3-rasm. Uzluksiz $x(t)$ va diskret $x(nT)$ signal grafiklari

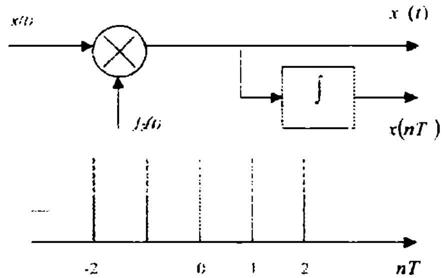
1.3-rasmda keltirilgan vaqt uzluksiz funksiyasini diskret signal $x(nT)$ ga mos keluvchi analog $x(t)$ signalga yoki $x(n)$ o‘rovchisiga tenglashtirish mumkin.

$x(t)$ va $x(nT)$ signallari bir-biri bilan chiziqli bog‘liklikda

$$x(nT) = \int x(t)\,dt$$

va bir xil xossalarga ega, ammo o‘lchov birliklari turlicha.

Tanlangan oniy qiymatlarni tartib raqami n orqali ifodalangan signallarni raqamlar ketma-ketligi deb ham ataladi. Uzluksiz vaqt funksiyasi (1.1) ni diskret signal ko‘rinishida aniqlash balans modulyatsiya signaliga yoki davriy takrorlanuvchi $f_s(t)$ δ impulslar $x(t)$ diskretlangan signallar oniy qiymatlariga proporsional yuzaga ega bo‘lgan impulslar ketma-ketligi yoki uning $x(nT)$ vaqtlaridagi impulslar oniy qiymatlariga ko‘paytmasiga teng deb hisoblash mumkin (1.4-rasm). Bu ta’rif analog signal va tizimlarni ta’riflovchi usullar (metod) yordamida matematik ifodalarni olish hamda ularni diskret signal va tizimlarga xos xususiyatlar (ko‘rsatkichlar) bilan solishtirish imkonini beradi.



1.4-rasm. Signalni vaqt bo'yicha diskretlash ekvivalent sxemasi

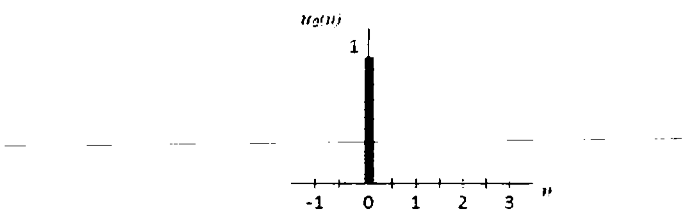
1.3. Sinov diskret signallari

Signallarga raqamli ishlov berish (SRIB)da bir qator signal turlaridan ta'sir etuvchi sinov signallari sifatida foydalaniladi. Eng ko'p foydalaniladigan sinov signallariga quyidagi signallar kiradi:

1. *Raqamli birlik impuls*, quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi:

$$u(n)=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & n\neq 0\end{cases} \tag{1.2}$$

ya'ni, bu signal $n=0$ bo'lganda birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (1.5-rasm).

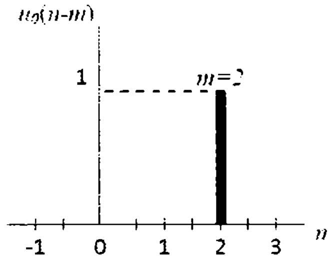


1.5-rasm. Raqamli birlik impuls

Kechiktirilgan (ushlanib qolgan) raqamli birlik impuls quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi:

$$u(n-m)=\begin{cases}1, & n=m;\\ 0, & n\neq m\end{cases} \tag{1.3}$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n=m$ bo'lganda birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (1.6-rasm).



1.6-rasm. Kechiktirilgan raqamli birlik impuls

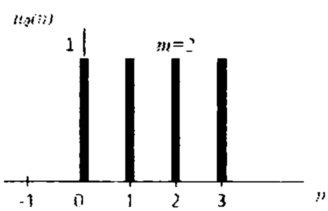
Kechiktirilgan raqamli birlik impuls ta'rifidan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} x(m) u_0 (n - m). \tag{1.4}$$

2. *Raqamli bitta sakrash* quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

ya'ni, bu signal n ning hamma manfiy bo'lmagan qiymatlarida birga teng (1.7-rasm).

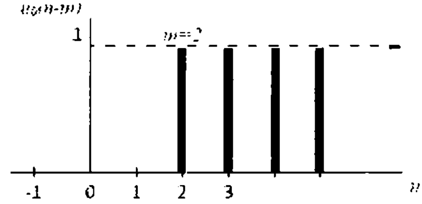


1.7-rasm. Raqamli bitta sakrash

Kechiktirilgan raqamli birlik sakrash quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$u_1 = (n - m) \begin{cases} 1, \ n \geq m; \\ 0, \ n < m. \end{cases} \tag{1.6}$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n \geq m$ ning hamma qiymatlarida birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (1.8-rasm).



1.8-rasm. Kechiktirilgan raqamli bitta sakrash

3. *Diskret eksponenta* quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(n) = \begin{cases} a^n, n \geq 0, \\ 0, n < 0. \end{cases} \qquad (1.7)$$

bunda, a – haqiqiy o‘zgarmas kattalik (konstanta).

a ning qiymati va belgisi (+ yoki -) ga bog‘liq ravishda diskret eksponenta quyidagicha nomlanadi:

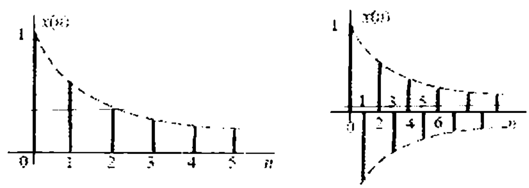
- $|a| < 1$ va $a > 0$ – kichiklashuvchi belgisi o‘zgarmas (1.9*a*-rasm) $|a| = 1$, $a < 0$;

  $|a| < 1$ va $a < 0$ – kichiklashuvchi o‘zgaruvchan belgili (1.9*b*-rasm);

  $|a| > 1$ – kattalashuvchi (o‘suvchi);

  $|a| = 1$ va $a > 0$ – raqamli birlik sakrash (1.7-rasm);

  $|a| = 1$ va $a < 0$ – belgisi o‘zgaruvchan birliklar ketma-ketligi.



a *b*

1.9-rasm. Belgisi o‘zgarmas (*a*) va belgisi navbat bilan o‘zgaruvchi (*b*) diskret eksponentalar

4. *Diskret garmonik signal*, misol uchun diskret kosinusoida quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(nT) = x(n) = A\cos(2\pi f nT) = A\cos(\omega nT) \qquad (1.8)$$

bunda T – diskretlash davri; A – amplituda; ω – aylanma chastota bo'lib, siklik (davriy) chastota f bilan proporsonallik koeffisienti 2π orqali bog'langan ($\omega = 2\pi f$).

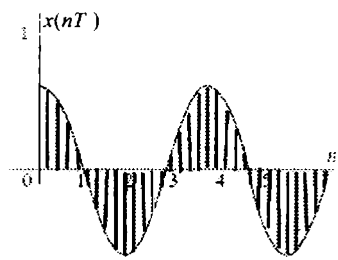
Diskret kosinusoida analog kosinusoidadan uzluksiz vaqtli diskret vaqt nT bilan almashtirish orqali olinadi, ya'ni

$$x(t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\omega t)$$

bo'lsa va uzluksiz vaqt t ni nT bilan almashtirish natijasida quyidagini olamiz (1.10-rasm)

$$x(nT) = x(n) = A\cos(\omega t)\big|_{t=nT} = A\cos(\omega nT) \qquad (1.9)$$

Diskret sinusoida ham shunga o'xshash shaklda ifodalanadi.



1.10-rasm. Diskret kosinusoida

5. *Diskret kompleks garmonik signal*, kompleks ketma-ketlik bilan ifodalanadi

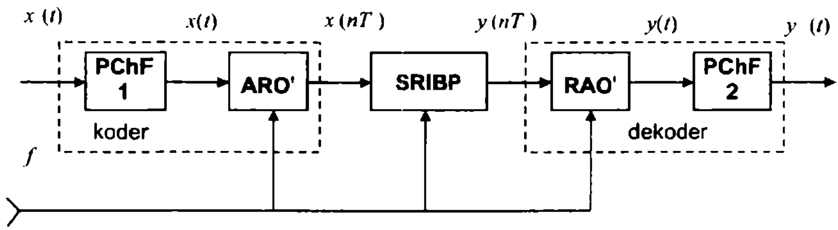
$$x(n) = Ae^{\omega}$$

yoki ikki haqiqiy ketma-ketlik: kosinusoida (haqiqiy qismi) va sinusoida (mavhum qismi) orqali ifodalanishi mumkin

$$x(nT) = A\cos(\omega nT) + jA\sin(\omega nT).$$

1.4. Signallarga raqamli ishlov berish umumlashgan sxemasi

Birlamchi kirish analog signali $x(t)$ ni boshqa chiqish analog signali $y(t)$ ga berilgan algoritm asosida raqamli hisoblash texnikasi yordamida o'zgartirish jarayoni ketma-ketligi 1.11-rasmda keltirilgan.



1.11-rasm. Signallarga raqamli ıshlov berish umumlashgan sxemasi

Signallarga raqamli ishlov berishda quyidagi uch bosqichni alohida ajratish mumkin:

- birlamchi signal $x(t)$ dan raqamli $x_r(nT_d)$ ni shakllantirish;
- raqamli signal $x_r(nT_d)$ asosida raqamli $y_r(nT_d)$ signalini shakllantirish;
- natijaviy chiqish analog signal $y_{ch}(t)$ ni raqamli $y_r(nT_d)$ asosida shakllantirish.

SRIB umumlashgan sxemasida bu uch bosqichga uch funksional qurilma mos keladi:

- koder;
- SRIB protsessori;
- Dekoder.

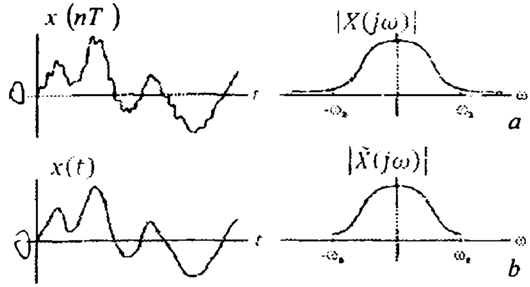
Birinchi bosqichda koder birlamchi kirish analog signal $x(t)$ ni $x_r(nT_d)$ raqamli shaklga keltiradi, chunki bu shakllantirishni amalga oshirmasdan signallarga raqamli ishlov berish umuman mumkin emas. Koder tarkibiga analog past chastotalar filtri (PChF-1) va analog-raqam o'zgartirgich (ARO') kiradi. Past chastotalar analog filtri birlamchi signal $x(t)$ spektri $x(j\omega)$ ni chegaralashga xizmat qiladi.

Birlamchi signal spektrini chegaralash Kotelnikov teoremasi talabidan kelib chiqadi, chunki bu teoremaga asosan diskretlash chastotasi f quyidagi shart asosida tanlanadi: $f \geq 2f$, bunda f – signal spektri eng yuqori chastotasi.

Signal spektrini chegaralash imkoniyati uning energiyasining o'ziga xos xususiyatiiga bog'liq: signal energiyasining asosiy qismi $f \leq f$ da to'plangan, ya'ni signal spektral tashkil etuvchilari amplitudasi qandaydir $f > f$ dan boshlab keskin kichiklashadi. Signal yuqori chastotasi f ni chegaralash signal turiga va yechiladigan masalaga bog'liq. Audio va videosignallarga ishlov berishda f ushbu signallarni qabullash impuls xarakteristikasi fiziologik xususiyatlariga bog'liq. Misol uchun, standart telefon signali uchun $f = 3{,}4$ kHz va minimal diskretlash chastotasi $f = 8$ kHz.

PChF chiqishida chastotasi spektri chegaralangan (finit) $x(t)$ spektri $\tilde{x}(j\omega)$ bo'lgan analog signal shakllantiriladi (1.12-rasm). Analog-raqam o'zgartirgich

$x(t)$ signalni diskretlash va kvantlash natijasida o'z chiqishida raqamli $x(nT)$ signalni shakllantiradi.



1.12-rasm. Signallar va ularning PChF kirishi (*a*) va chiqishidagi (*b*) amplituda spektrlari

Vaqt bo'yicha diskretizatsiyalash (oddiy diskretizatsiyalash) jarayoni analog $x(t)$ signaldan diskretlash odimi davri T ga teng oraliqlarda uning oniy qiymat (hisob)larini aniqlashdan iborat. Raqamli signal $x(nT)$ o'lchovi $x(t)$ signalning $t = nT$ vaqtdagi oniy qiymatlariga teng (mos) keladi:

$$x(nT) = x(t)|_{t=nT}$$

Sath bo'yicha kvantlash (kvantlash) raqamli signal $x(nT)$ ning aniq o'lchovlari $x(nT)$ larini cheklangan razryadli ikkilik sonlar – kvantlangan o'lchov $x(nT)$ lar orqali ifodalash maqsadida amalga oshiriladi. Buning uchun diskret signal $x(nT)$ ning dinamik diapazoni soni cheklangan diskret sathlariga – kvantlash sathlariga bo'linadi va har bir o'lchovga ma'lum qoida asosida unga eng yaqin bo'lgan sathlardan biri biriktiriladi. Kvantlash sathlari umumiy sathlar soni R ga bog'liq ravishda razryadlari soni b ga teng bo'lgan ikkilik kod bilan kodlanadi:

$$R \le 2 \ ,$$

bundan $b = \mathrm{int}(\log R)$, int – olingan natija yuqori tomondagi butun sonni olish amalini bajarishini anglatadi.

Kvantlangan o'lchov $x(nT)$ ni ($n = 0, 1, \ldots$) kodlash natijasida olingan ikkilik signal raqamli signal deb ataladi.

Analog signalni raqamliga o'zgartirish natijasidagi kvantlash xatoligi $\varepsilon(n)$ avvaldan ma'lum va tasodifiy qismini baholash quyidagicha ifodalandi:

$$\varepsilon(n) = x(nT) - x(nT).$$

Ikkinchi bosqichda SRIB protsessori raqamli signal $x(nT)$ ni raqamli signal $y(nT)$ ga berilgan algoritm asosida o'zgartiradi. SRIB protsessori (SRIBP) o'rniga signallarga raqamli ishlov berish maxsus dastur asosida amalga oshirilishi mumkin.

Umuman olganda SRIB qurilmalari (SRIBP yoki dasturiy amalga oshirilishi) real vaqt yoki noreal vaqtlarda ishlashi mumkin. Signallarga real vaqtda ishlov berish kirish signali $x(t)$ ning o'lchovlari $x(nT)$ $(n = 0, 1, ...)$ ning uning kirishi tezligiga qarab shu onda amalga oshirilishi kerak va quyidagi talablarni qondirishi lozim.

- $y(nT)$ ning o'lchovlarini hisoblash sikli vaqti Δt $x(nT)$ ning ikki qo'shni o'lchovlari orasidagi vaqtdan katta bo'lmasligi, ya'ni diskretlash vaqti T dan kichik bo'lishi kerak:

$$\Delta t \leq T,$$

- protsessor takt chastotasi $x(nT)$ signal diskretlash chastotasi f dan ancha katta bo'lishi kerak,

$$f_t \gg f_x.$$

Oxirgi talab $y(nT)$ bitta o'lchamini hisoblashga kerakli SRIB algoritmlaridagi bajarishi kerak bo'ladigan amallar soni juda ko'pligidan kelib chiqadi.

Misol uchun, diskretlash chastotasi 8 kHz bo'lgan standart telefon signali uchun takt chastotasi 6 MHz dan kichik bo'lmasligi kerak. Birlamchi analog signal $x(t)$ ni raqamli aloqa kanalari, shu jumladan Internet orqali uzatish ularga real vaqtda ishlov berishni talab qiladi. ~~SRIBlar real vaqtda ishlov berishini talab~~ qiladigan vazifalarga quyidagilar kiradi: signallarni qidirib topish, filtrlash, siqish, tanlash va h.k.

Signallarni tadqiqot qilish bilan bog'liq bo'lgan SRIB noreal vaqtda bajarilishi mumkin. Noreal vaqtda SRIB vazifalariga quyidagilar kiradi: audio va video signallarga studiyada ishlov berish, turli fizik tabiiy kattaliklarni elektr signaliga o'zgartirib beruvchi (datchik) qurilmalardan olingan ma'lumotlarga ishlov berish va boshqalar.

Uchinchi bosqichda raqamli signal $y(nT)$ asosida dekoder natijaviy chiqish signali $y(t)$ ni shakllantiradi. Dekoder tarkibiga raqam-analog o'zgartirgich (RAO') va silliqlovchi past chastotalar filtri (PChF-2) kiradi. Raqam-analog o'zgartirgich raqamli signal $y(nT)$ ni zinasimon analog signal $y(t)$ ga aylantiradi. Silliqlovchi filtr RAO' chiqishidagi $y(t)$ dagi zinasimon o'zgarishlarni tekislaydi.

Nazorat savollari

1. *Signallarning asosiy turlarini ayting va ularga qisqa ta'rif bering.*
2. *Vaqt va sath bo'yicha diskretlash deganda nimani tushunasiz?*
3. *Kotelnikov teoremasini aytib bering.*
4. *Raqamli signal deb qanday signalga aytiladi?*
5. *Raqamli signal nima uchun matematik ifodani yozing va tushuntirish bering.*
6. *Vaqt bo'yicha diskretlash va sath bo'yicha kvantlash haqida chizma asosida so'zlab bering.*
7. *Kvantlash xatoligi nimani anglatadi va uning qiymati nimaga teng?*
8. *Raqamli signal kodlari razryadlari soni nimaga bog'liq.*
9. *Diskret signal matematik modeli haqida tushuncha bering.*
10. *Tajriba signallari turlarini sanab o'ting va ular haqida nimalarni bilasiz?*
11. *Signalga ishlov berish umumlashgan strukturaviy sxemasini chizing va har bir tashkil etuvchisining vazifasini aytib bering.*

2. DISKRET SIGNALLARNI ALMASHTIRISH

Signal va funksiyalarni odatdagicha, ularning qiymatlarini ma'lum argumentlar (vaqt, chiziqli yoki fazoviy koordinatalar va shunga o'xshashlar)dan tashqari, ma'lumotlarga ishlov berish va ularni tahlil etishda signallarni argumenti dinamik shaklda ifodalashdagiga teskari bo'lgan argumentli matematik ifodalardan ham keng foydalaniladi. Misol uchun, vaqtga teskari bo'lgan argument bu chastotadir. Bu shaklda ifodalash ushbu signal o'zining berilgan vaqt oralig'ida cheksiz ko'p bo'lmagan qiymatlarga ega bo'lsa, har qanday murakkab ko'rinishdagi signalni nisbatan sodda, oddiy elementar signallar yig'indisi orqali ifodalash mumkin, va xususiy holda oddiy garmonik tebranishlar yig'indisi ko'rinishida, ya'ni Fure almashtirishi orqali bajarilishi mumkin. Yuqoridagidan kelib chiqqan holda signalni elementar garmonik tashkil etuvchilarga yoyish uzluksiz yoki boshlang'ich fazasi qiymatlari orqali ifodalanadi. Uzluksiz yoki diskret vaqt argumentlari ularga teskari bo'lgan ifodalashga mos keladi. Signal yoyilgan garmonik tashkil etuvchilarning majmuasi ushbu signalning amplituda spektri deb ataladi va boshlang'ich fazalar majmuasi faza spektri deb ataladi. Ushbu ikki spektr signalning to'liq spektrini tashkil etadi va bu matematik ifoda o'z aniqligi bilan signalni dinamik ko'rinishda ifodalashga to'liq mos keladi.

Fure garmonik qatoridan tashqari signalni yana boshqa ko'rinishdagi elementar tashkil etuvchilarga yoyishlardan ham foydalaniladi, bular Uolsh, Adamar, Veyvlet va boshqalardir. Bundan tashqari Chebishev, Lagger, Lejandr polinomlari va boshqalarga yoyish usullari ham mavjud. Signallarga raqamli ishlov berishda Fure diskret almashtirishi (FDA) va uni tezkor hisoblash usuli – Fure tez almashtirishi (FTA) dan keng foydalaniladi. Bunga bir necha sabablar bor: ular chastotalar koordinatasida eng qisqa vaqt davom etadigan signallardan (<1 s) tashqari signallarni to'liq – aniq ifodalaydilar; chastota bo'yicha qisqartirilgan Fure tashkil etuvchilari ma'lumotlarni boshqa darajali qatorlarga nisbatan aniqroq ifodalaydi. Uning alohida tashkil etuvchilari sinusoida ko'rinishida bo'lib, chiziqli tizimlar orqali uzatilganda buzilmaydilar (o'z shakllarini o'zgartirmaydilar), shu sabali ulardan yaxshi sinov signallari sifatida foydalanish mumkin.

Signallarni elementar tashkil etuvchilarga yoyishda asosiy shart birqiymatlik va matematik ifodaning to'liq mosligi – yoyilayotgan elementar funksiyalar o'zaro ortogonal bo'lishlari kerak. Ammo signal sifatli tahlil etilgan taqdirda ularning foydali fizik ma'lumotlarini aks ettirish uchun kerakli, o'ziga xos xususiyatlarini ko'rsatuvchi noortogonal funksiyalardan ham foydalanish mumkin. Signallarga raqamli ishlov berishda eng ko'p qo'llaniladigan signallarni yoyish usullarini ko'rib chiqamiz.

2.1. Fure qatori

Har qanday davriy signal $S(t)$ ni cheksiz ko'p sinusoidal va kosinusoidal argumenti karrali tashkil etuvchilar va doimiy tashkil etuvchi yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. Bunday ifodalash Fure qatoriga yoyish deb ataladi va quyidagi matematik ifoda orqali ifodalanadi

$$S(t)=a+\sum^{\infty} a\cos(n\omega T)+\sum^{\infty} b\sin(n\omega T), \tag{2.1}$$

bunda t – mustaqil o'zgaruvchi bo'lib, odatda vaqtni anglatadi, ammo u masofa yoki har qanday boshqa kattalik bo'lishi mumkin; $S(t)$ – ko'p hollarda kuchlanish funksiyasining argument vaqtga bog'liqligini bildiradi, ammo har qanday boshqa signalni ham bildirishi mumkin; $\omega = 2\pi / T$ – siklik chastota asosiy (birinchi) garmonikasi bo'lib, asosiy davriy chastota f bilan $\omega = 2\pi f$ ko'rinishida bog'liq, T – signal takrorlanish davri.

Fure qatori doimiy tashkil etuvchisi a quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$a = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2} S(t)dt.$$

Signalning doimiy tashkil etuvchisi $S(t)$ signalning bir davr vaqt bo'yicha o'rtacha qiymatiga mos keladi. Misol uchun o'zgarmas kuchlanish sathi

$$a = \frac{2}{T_p}\int S(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b = \frac{2}{T_p}\int S(t)\sin(n\omega t)dt.$$

$n\omega$ chastota ω chastotaning n-chi garmonikasi deyiladi. Demak cheksiz qator chastotaga bog'liq bo'lgan turli amplitudali a va b kosinusoidal va sinusoidal chastotalari musbat $n\omega$ garmonikali tashkil etuvchilardan iborat. Bu qatorni eksponensial funksiya yordamida impuls xarakteristikasi ixchamroq shaklda ham ifodalash mumkin

$$S(t)=\sum d\, e^{\omega t}, \tag{2.2}$$

bunda

$$d = \frac{1}{T_p}\int S(t)e^{-\omega}dt \tag{2.3}$$

kompleks sonlar bo'lib, $|d|$ – voltlarda baholanadigan kattalik.

(2.1) ifodada elementar tashkil etuvchilar yig'indisini aniqlashda n ning manfiy qiymatlari ham hisobga olinadi, qatorning yarim tashkil etuvchilari $n\omega$ manfiy chastotaga ega bo'ladi. Ular fizik qiymatga ega bo'lmaydilar va faqat matematik tushunchalar bo'lib, buning natijasida kompleks amplituda d larning modullari $|d|$ miqdor jihatdan ikki marta kichik qilib olingan. Bu musbat va manfiy chastotalarda mos amplitudalar bir-biriga teng etib taqsimlanganligini anglatadi. Natijada chastotasi $n\omega$ bo'lgan tashkil etuvchining haqiqiy qiymati hisoblab aniqlangan qiymatni ikkiga ko'paytirish orqali aniqlanadi.

Signalning kompleks va trigonometrik shakldagi ifodalari bir-biri bilan quyidagicha bog'langan:

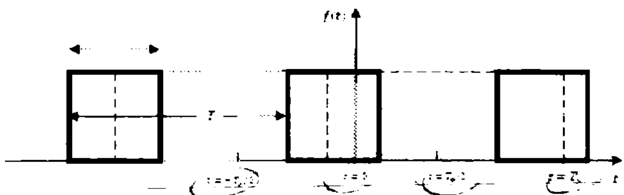
$$|d_n| = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}, \tag{2.4}$$

$$\varphi_n = -arctg\left(b_n / a_n\right), \tag{2.5}$$

bunda φ_n – n-chi garmonikali tashkil etuvchisi boshlang'ich fazasi bo'lib, uni d_n ning mavhum va haqiqiy tashkil etuvchilarining arktangensi sifatida aniqlanadi. Demak, signalning har bir garmonikasi o'zining amplitudasi va fazasi siljishi bilan xarakterlanadi.

2.2. Fure almashtirishi

Agar signal davriy bo'lmasa, u holda Fure qatoriga yoyish moslashtiriladi. Misol tariqasida 2.1*a*-rasmda keltirilgan to'g'ri burchakli impulslar ketma-ketligidan impulslar takrorlanish davri T ni cheksizlikkacha davom ettirish natijasida yagona to'rtburchakli impulsni hosil bo'lishini ko'rib chiqamiz.



2.1-rasm. Davriy takrorlanuvchi to'g'riburchakli impuls

T ni kattalashtirib borilsa garmonikalar orasidagi $1/T = \omega/2\pi$ bo'lgan masofa $d\omega/2\pi$ gacha kichiklashib boradi va nolga teng bo'ladi. Bu o'zgaruvchi diskret chastota $n\omega$ dan uzluksiz o'zgaruvchi ω ga o'tishga, shu bilan bir vaqtda fazaviy va amplitudaviy spektr ham uzluksiz bo'lishiga olib keladi. Demak, $T \to \infty$ bo'lganda $d_n \to d\omega$ bo'ladi. Ushbu o'zgartirishlarni e'tiborga olsak (2.3) ifoda quyidagi ko'rinishni oladi

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{2.6}$$

Qulay bo'lishi uchun (2.6) ifodani $d\omega/2\pi$ ga bo'lib quyidagi ifodani olamiz

$$\frac{d(\omega)}{d(\omega)/2\pi}=F(j\omega)=\int S(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.7)$$

Bu formuladagi $F(j\omega)$ Fure integrali yoki oddiygina Fure tasviri (ko'rinishi) deb ataladi. $F(j\omega)$ ni haqiqiy va mavhum qismlari yig'indisi shaklida quyidagicha ifodalash mumkin, agar

$$F(j\omega)=\mathrm{Re}(j\omega)+j\,\mathrm{Im}(j\omega)=|F(j\omega)|e^{\varphi(\omega)}, \qquad (2.8)$$

bo'lsa, u holda

$$|F(j\omega)|=[\mathrm{Re}^2(j\omega)+\mathrm{Im}^2(j\omega)] \qquad (2.9)$$

bo'ladi va bu kattalik voltda emas V/Hz larda baholanadi. $F(j\omega)$ ni amplituda zichligi, ba'zan esa amplituda spektri zichligi yoki amplituda spektri deb ataladi. Amplituda spektriga mos ravishda faza siljishi $\varphi(\omega)$ quyidagicha aniqlanadi

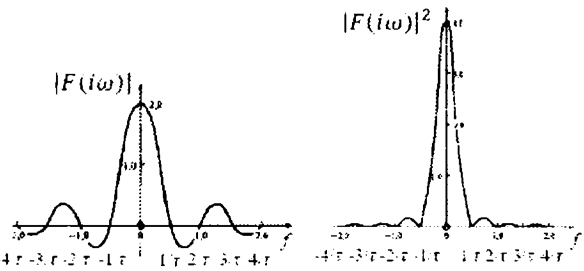
$$\varphi(\omega)=arctg[\mathrm{Im}(j\omega)/\mathrm{Re}(j\omega)]. \qquad (2.10)$$

$|F(j\omega)|$ qiymati V^2/Hz^2 shaklida baholanadi. Normallashtirilgan elektr quvvati, ya'ni qarshiligi 1 Om bo'lgan qarshilikda ajralib chiqayotgan quvvat V^2 larda baholanadi, bu Dj/s yoki Dj·Hz (Djoul bu energiya birligi)ni anglatadi, u holda V^2/Hz^2 kattalik DjHz·Hz^{-2}= Dj·Hz^{-1} ga teng bo'ladi. Demak $|F(j\omega)|$ bir taqsim Hz energiyani, ya'ni $|F(j\omega)|$ – spektr energiyasining zichligini anglatadi. $|F(j\omega)|$ ning f ga bog'liqligi grafigi ostidagi yuza asosi $f-df$ va $f+df$ polosa f chastotasi o'rtacha kuchlanishini ifodalaydi. $|F(j\omega)|$ ning f ga bog'liqligi grafigi ostidagi yuza f chastotadagi energiya o'rtacha qiymatiga teng bo'ladi. Bundan tashqari spektr tahlilida ko'p hollarda spektr energiyasi zichligining chastotaga bog'liqlik grafigi (chizmasi) ham quriladi.

Agar impulsdan oniy qiymat olish uning markaziga (qoq o'rtasiga) mos kelsa, ya'ni $x=\frac{1}{2}$ bo'lganda ushbu impulsning Fure shakli (ko'rinishi) quyidagicha beriladi

$$F(i\omega)=\frac{A\tau\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}=A\tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2) \qquad (2.11)$$

va haqiqiy hisoblanadi. $|F(j\omega)|$ funksiya uzluksiz bo'lib, uning $A=1$ V, $T=10$s va $\tau=2$s qiymatlari uchun grafigi 2.2*a*-rasmda tasvirlangan. Bu amplituda spektri oniy qiymatlar funksiyasiga proporsional bo'lib, hamma vaqt ideal past chastota filtriga to'g'riburchakli impuls ta'sirida hosil bo'ladi, shu bilan birga har qanday davomiyligi t bilan cheklangan impuls ta'sirida ham yuzaga kelishi mumkin.



a *b*

2.2-rasm. Impuls amplitudasi 2V: a) amplituda spektri; b) energiya spektri

Amplitudasi 2 V bo'lgan impuls energiya spektral zichligi grafigi 2.2*b*-rasmda tasvirlangan, 2.2*a*-rasmda esa amplituda spektri tasvirlangan.

Shuni alohida ta'kidlash kerakki, funksiyaning chastotaga bog'liqligidan vaqt funksiyasiga Fure teskari almashtirishi yordamida o'tish mumkin. Bu holda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,df \tag{2.12}$$

2.3. Fure diskret almashtirishi (FDA) va teskari FDA

Amalda signal Fure tashkil etuvchilari, unga analog ishlov berish natijasida emas, raqamli hisoblashlar natijasi orqali aniqlanadi. Analog signal cheksiz ko'p bir-biriga yaqin nuqtalardan iborat bo'lganligi uchun, uning hamma qiymatlarini ifodalash mumkin emas. Shuning uchun raqamli tizimlardan foydalanish uchun analog signalni bir xil vaqt oraliqlarida diskretlash kerak bo'ladi va bu oniy qiymat(o'lchov)larni ikkilik raqamli signal shakliga keltirish kerak bo'ladi. Bu oniy qiymatni o'lchash xotirada saqlash konturi yordamida amalga oshiriladi, so'ngra analog-raqamli o'zgartirish amalga oshiriladi. Analog signalni yuqori aniqlik bilan tiklash uchun bu bir sekund davomida olingan oniy qiymat(o'lchash)lar soni yetarli darajada. Nazariy nuqtai nazardan diskretlash kerakli tezligi Naykvist chastotasi deb ataladi va $2f$ ga teng, f – signalning amplitudasi sezilarli darajada katta eng yuqori chastotali sinusoidal ko'rinishdagi tashkil etuvchisi chastotasi.

Shunday qilib, o'zgartirilishi kerak bo'lgan hamma ma'lumotlar endi diskret va nodavriy ham bo'lishi mumkin. Shuning uchun Fure almashtirishidan foydalanish mumkin emas, chunki u uzluksiz ma'lumotlar uchun mo'ljallangan. Ammo, shunday analog almashtirish borki, uni diskret ma'lumotlarga ham qo'llash mumkin – bu Fure diskret almashtirishi (FDA).

Faraz qilaylik, analog signalni bir xil vaqt T oraliqlarida diskretlash natijasida N ta oniy qiymat(o'lchash)ga ega bo'lgan quyidagi diskret ketma-ketlik olingan bo'lsin $\{x(nT)\} = x(0), x(t), \ldots, x[(N-1)T]$, bunda n – olingan oniy qiymat tartib raqami bo'lib, $n=0$ dan $n=N-1$ gacha qiymatlarni qabul qiladi. $x(nT)$ qiymati faqat kuchlanish spektriga tegishli vaqt qatoriga tegishli qiymatlarni ifodalaganda haqiqiy kattalik bo'ladi.

Shuning uchun signalning vaqt bo'yicha haqiqiy bo'lgan N ta qiymatlari FDAning chastota bo'yicha N ta kompleks qiymatlariga aylanadi

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-ik\Omega nT}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.13}$$

bunda F orqali Fure diskret almashtirishi belgilangan.

Teskari Fure diskret almashtirishi (TFDA) quyidagicha aniqlanadi

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{ik\Omega nT}, n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{2.14}$$

bunda F^{-} orqali teskari Fure diskret almashtirishi belgilangan.

2.4. Fure tezkor almashtirishi

Fure diskret almashtirishidan foydalanib katta davomiylikka ega impulslar ketma-ketligiga ishlov berishda katta hajmdagi arifmetik amallar (ko'paytirish, qo'shish va kechiktirish)ni real vaqt oralig'ida bajarish talab etiladi. Hozirda katta tezlikda arifmetik amallarni bajaruvchi maxsus signal protsessorlari mavudligiga qaramasdan katta hajmdagi signallarga raqamli ishlov berishni real vaqt davomida bajarishda qiyinchiliklar mavjud. Misol uchun $x(n)$ ketma-ketlik uchun $N=10$ bo'lgan holat uchun Fure diskret almashtirishini

$$\dot{G}(k) = \sum x(n)e \quad , \text{ bunda } k = 0, 1, 2, \ldots, N-1 \tag{2.15}$$

formula orqali aniqlashda va $x(n)$ kompleks kattalik bo'lganda $(N-1) \approx 10$ ta kompleks ko'paytirish va $N(N-1) \approx 10$ ta kompleks qo'shish amallarini bajarish kerak bo'ladi.

Fure tezkor almashtirishi (FTA)dan foydalanish asosida bajariladigan arifmetik amallar sonini bir necha tartibga keskin kamaytirish mumkin.

FTAning asosini bir o'lchamli sonlar massivini ko'p o'lchamli bilan almashtirish tashkil etadi. Bir o'lchamli sonlar massivini ko'p sonliga aylantirishning bir necha usullari mavjud, ya'ni TFAning bir necha algoritmlari mavjud.

Ushbu FTA algoritmlaridan birini ko'rib chiqamiz. N nuqtali $x(n)$ ketma-ketlik uchun FTAni aniqlaymiz. Buning uchun N deb hisoblaymiz. N nuqtali

$x(n)$ ketma-ketlikni ikki ($N/2$) nuqtali juft $x\ (n)$ va toq $x\ (n)$ ketma-ketliklarga ajratamiz.

$$x\ (n) = x(2n), \quad n = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1, \tag{2.16}$$

$$x\ (n) = x(2n+1), \quad n = 0, 1, ..., \frac{N}{2} - 1. \tag{2.17}$$

N nuqtali $x(n)$ ketma-ketlikning FTAi quyidagicha aniqlanadi:

$$\dot{G}(k) = \sum x(n) e \ + \sum x(n) e \ = \tag{2.18}$$

$$= \sum x(2n) W \ + \sum x(2n+1) W$$

bunda, $W \ = \left[e\ \right] = e \ = W$ (2.19)

(2.18) ifodani (2.19) ni e'tiborga olgan holda quyidagi shaklga keltiramiz:

$$\dot{G}(k) = \sum x\ (n) W \ + W \ \sum x\ (n) W \tag{2.20}$$

yoki

$$\dot{G}(k) = \dot{G}\ (k) + W\ \dot{G}\ (k), \tag{2.21}$$

bunda, $\dot{G}\ (k)$ va $\dot{G}\ (k)$ mos ravishda $x\ (n)$ va $x\ (n)$ ketma-ketliklarning ($N/2$) nuqtali FDAga teng.

(2.21) ifoda $\dot{G}(k)$ N ~~nuqtali FDAni $\dot{G}\ (k)$ va $\dot{G}\ (k)$ ($N/2$) nuqtali FDAlari~~ yig'indisi shaklida aniqlash mumkin.

Agar ($N/2$) nutali FDAni oddiy usulda hisoblanganda N nuqtali FDAni aniqlash uchun $(N \ /2 + N)$ ta kompleks ko'paytirish amalini bajarish kerak bo'ladi. N katta bo'lganda, ya'ni $(N \ /2 + N) \approx N \ /2$ bo'lgan holat uchun $\dot{G}(k)$ ni aniqlashda bajariladigan ko'paytirish amallari soni taxminan 2 marta kamayadi.

$\dot{G}(k)$ ni $0 \le k \le N-1$ lar uchun aniqlash kerakligini va $\dot{G}\ (k)$, $\dot{G}\ (k)$ larni esa $0 \le k \le N/2-1$ uchun aniqlash kerakligini e'tiborga olib (2.21) ifodani $k \ge N/2$ uchun aniqlaymiz:

$$\begin{aligned} \dot{G}(k) &= \dot{G}\ (k) + W\ \dot{G}\ (k), \quad agar \quad 0 \le k \le N/2-1, \\ \dot{G}(k) &= \dot{G}\ (k - N/2) + W\ \dot{G}\ (k - N/2), \quad agar \quad N/2 \le k \le N-1. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Bunda $\dot{G}(k)$ va $\dot{G}(k)$ lar har $N/2$ davrda k tadan takrorlanishi e'tiborga olingan.

Yuqorida keltirilgan FTA algoritmini yo'naltirilgan graflar yordamida tshuntirish uchun (6.3-rasm) sakkiz nuqtali FTAni ikkita to'rt nuqtali graflardan foydalanish usuli tasvirlangan.

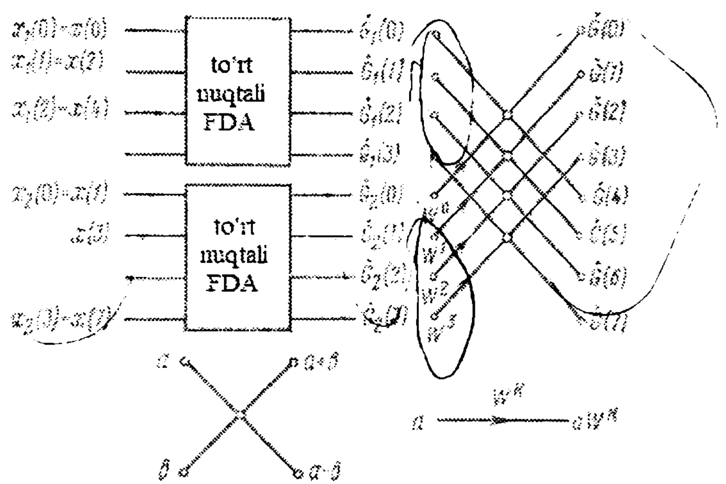
Dastlab kirishdagi $x(n)$ ketma-ketligi ikkita $x(n)$ – juft va $x(n)$ – toq ketma-ketlikka bo'laklangan bo'lib, ular uchun $\dot{G}(k)$ va $\dot{G}(k)$ lar aniqlanadi. So'ngra (2.22) ifodaga asoslanib $\dot{G}(k)$ aniqlanadi. O'z navbatida har bir $x(n)$ va $x(n)$ ketma-ketliklar ikkiga bo'linib, to'rtta ikki nuqtali ketma-ketliklar hosil qilish mumkin. (2.21) va (2.22) ifodalarni e'tiborga olib $N/2$ nuqtali FDA ikkita $N/4$ nuqtali FDA kombinatsiyalari shakliga keltirilishi mumkin.

$$\dot{G}(k) = A(k) + W \quad B(k), \tag{2.23}$$

yoki

$$\dot{G}(k) = A(k) + W \quad B(k), \tag{2.24}$$

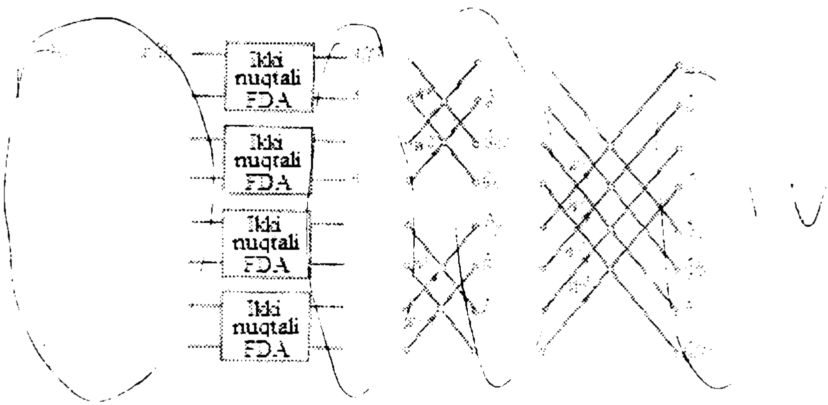
bunda, $0 \le k \le N/2-1$, $A(k)$ va $B(k)$ – $N/4$ nuqtali $x(n)$ ning juft va toq FDAlari.



2.3-rasm. Sakkiz nuqtali FTAni ikkita to'rt nuqtali graflardan foydalanish usuli

2.4-rasmda sakkiz nuqtali FDAni ikki to'rt nuqtali FDA va uni o'z navbatida to'rtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi keltirilgan.

N nuqtali FDAlarini ketma-ket ikkiga bo'lish usuli bilan kompleks ko'paytirishlar sonini oddiy usulda hisoblashlar soni $(N-1)$ dan $N/2\log N$ taga kamaytirish imkoniyatini beradi.



2.4-rasm. Cakkiz nuqtali FDAni ikki to'rt nuqtali FDA va uni o'z navbatida to'rtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi

2.3-rasmdagi bo'yalmagan kichik aylanma nuqtalar qo'shish-ayirish amalini anglatadi, bunda yuqoridagi chiqishlar yig'indi (va pastkilari ayirish) natijasini bildiradi. Yo'nalish belgisi (strelka) ushbu yo'nalish belgisi yuqorisidagi ko'paytma a ga ko'paytirish amalini bajarishini anglatadi. Umuman o'zgaruvchilarning hammasi kompleks sonlar. Rasmdagi tugun (uzel)lar alohida FDAlari kirish va chiqishlari massivlari qiymatlarini ro'yxatga olish funksional qurilmasini bildiradi.

2.5. Diskret kosinus almashtirish (DKA)

Diskret kosinus almashtirishlardan korrelyatsiya va svertka (o'ram)ni hisoblashni tezlashtirishda va spektr tahlilida foydalaniladi. Bundan tashqari bu usullardan ma'lumotlarni siqish, misol uchun ovozni (tovush) yoki tasvirni uzatish, elektrokardiogramma va elektroensenogramma kabi medisina signallarini yozish uchun foydalaniladi. Shuningdek DKAdan tasvir va nusxa (shablon)larni tanishda ham foydalaniladi. Buning natijasida signallarni uzatish uchun kodlashda talab etiladigan "bit"lar soni kamayadi, bu signal uzatish tezligini oshiradi. Bu esa nisbatan tor polosali aloqa liniyalaridan foydalanish imkoniyatini keltirib chiqaradi, shuningdek nusxa (shablon)larni tanishni osonlashtiradi (bu axborot hajmi kamaytirilishi hisobiga ro'y beradi). DKAning ushbu xususiyatlari uni signallarni siqish nuqtai nazaridan samaradorligini bildiradi, bu signal energiyasining past chastotalarda to'planishi natijasida ro'y beradi. Bundan tashqari hisoblashlarning soddaligi va o'rtacha kvadratik xatolikning kichik (minimal) bo'lishini ta'minlaydi.

Yuqoridagi fikrlar Fure diskret kosinus almashtirishdan (FDKA) foydalanishni taqozo etadi. Umuman olganda FDKA Fure diskret almashtirishining haqiqiy qismidan iborat, chunki Fure qatori haqiqiy va juft qismi faqat kosinusoidal tashkil etuvchilardan iborat bo'lib, misol uchun kuchlanishning diskret qiymatlaridan foydalanilganda ma'lumotlar haqiqiy bo'ladi, ularni ikki marta ko'p qilish uchun ularga aks tashkil etuvchilarini qo'shish kerak bo'ladi.

(2.13) formulaga asosan FDA quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Ushbu almashtirishning haqiqiy qismi DKAni anglatadi

$$X_c(k) = \mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Bu DKAning bir xususiy ko'rinishi. DKAning umumiy ko'rinishi quyidagicha aniqlanadi

$$X_c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n + k\pi}{2N}\right) =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2.25}$$

2.6. Uolsh almashtirishi

Hozirgacha ko'rib chiqilgan almashtirishlar sinus va kosinus funksiyalariga asoslangan edi. Impulsga o'xshash +1 va −1 ga asoslangan almashtirish nisbatan oson va tez hisoblash imkoniyatini beradi. Bundan tashqari bunday almashtirishlar uzluksizligi buzilgan signallarni ifodalashda ancha qulay hisoblanadi, misol uchun, tasvir signallarini almashtirishda. Shu bilan birga ular uzluksiz signallarni ifodalashda ancha noqulay bo'lib, ular fazalari bo'yicha moslikni ta'minlamaydilar, bu signal spektrining buzilishiga va natijada signal shaklining buzilishiga olib keladi. Shuning uchun Uolsh almashtirishidan odatda tasvir signallariga ishlov berish (astronomiya va spektroskopiya)da signallarni kodlash va filtrlashda foydalaniladi.

Fure diskret almashtirishi garmonik sinusoidal va kosinusoidal tashkil etuvchilar orqali ifodalanganidek, Uolsh diskret almashtirishi (UDA) Uolsh funksiyalari deb ataluvchi to'g'ri to'rtburchakli o'rovchili garmonik signallar to'plami orqali ifodalashga asoslangan. Ammo to'g'riburchakli impulslar uchun ularning takrorlanish chastotasi noma'lum bo'lgani uchun analog signal uchun foydalaniladigan "ketma-ketlik" atamasidan foydalaniladi. "Ketma-ketlik" – bu vaqt birligida nolni kesib o'tishlar sonining yarmiga teng bo'ladi. 2.5-rasmda $N=8$ gacha bo'lgan tartibdagi Uolsh funksiyalari kattalashish tartibida ko'rsatilgan. Bu ko'rinishni Uolsh bo'yicha tartibga keltirilgan funksiya deb ataladi. Davomiylik vaqti t ga va tartibi n ga teng Uolsh funksiyasi quyidagicha belgilanadi $\mathrm{WAL}(n,t)$. 2.5-rasmdan ko'rinadiki xuddi Fure qatorida toq va juft sinusoidal va kosinusoidal funksiyalar bir-biriga teng bo'lganidek, Uolsh funksiyasida ham bir xil sonli toq va juft funksiyalar bo'ladi. Uolsh $\mathrm{WAL}(2k,t)$ juft funksiyalari $\mathrm{CAL}(k,t)$ ko'rinishida ifodalanadi va $\mathrm{WAL}(2k+1,t)$ toq funksiyalari $\mathrm{CAL}(2k+1,t)$ ko'rinishida ifodalanadi, bu yerda $k=1,2,...,N/2-1$.

Har qanday $S(t)$ signalni Uolsh funksiyalari majmua (jamlama)lariga yoyish mumkin (xuddi Fure qatoriga yoygandek)

$$S(t)=a_0\mathrm{WAL}(0,t)+\sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{N/2-1}[a_i\mathrm{SAL}(i,t)+b_i\mathrm{CAL}(j,t)]. \quad (2.26)$$

bunda a va b – qator koeffisientlari.

Har qanday ikkita Uolsh funksiyasi uchun quyidagi ifoda kuchga ega

$$\sum \mathrm{WAL}(m,t)\mathrm{WAL}(n,t)=\begin{cases} N & agar\ n=m, \\ 0 & agar\ n\neq m. \end{cases}$$

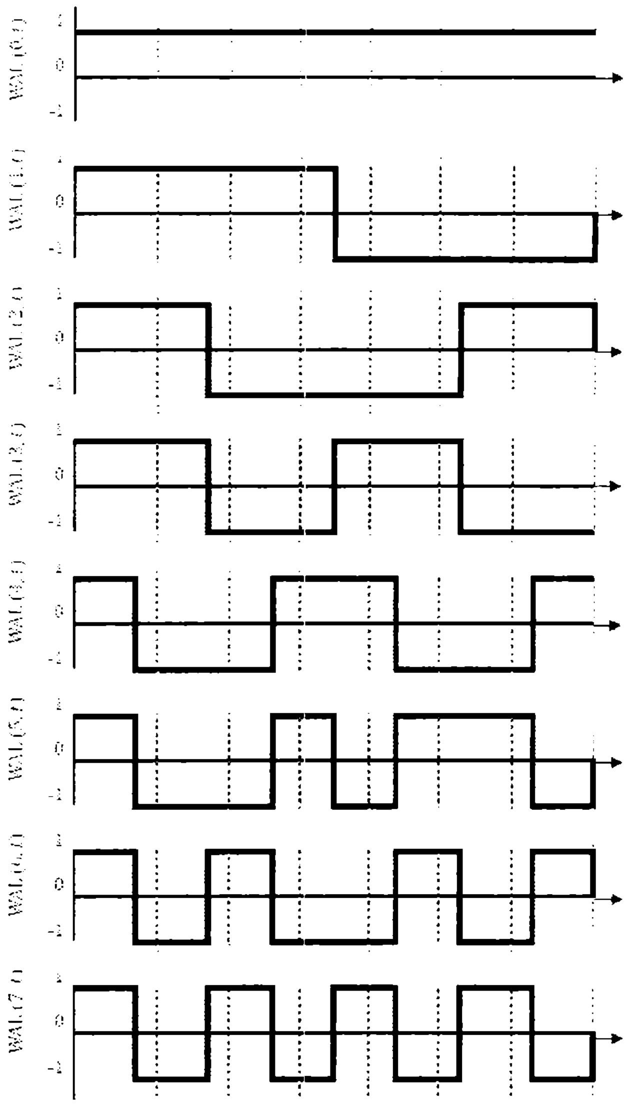
ya'ni Uolsh funksiyalari o'zaro ortogonal.

Uolsh almashtirishi uchun to'g'ri va teskari almashtirishlarni tadbiq etish mumkin:

$$X_k=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x_i\mathrm{WAL}(k\ i),\quad k=0,1,\dots,N-1. \quad (2.27)$$

$$x_i=\sum_{i=0}^{N-1}X_k\mathrm{WAL}(k,i),\quad k=0,1,\dots,N-1. \quad (2.28)$$

Agar $1/N$ ko'paytmani e'tiborga olinmasa teskari almashtirish to'g'ri almashtirish bilan bir xil va $\mathrm{WAL}(k,i)=\pm1$ bo'ladi.



2.5-rasm. Uolshning 8×8 tartibli almashtirishi matrisasi uchun uning ketma-ket kattalashishi $n = 7$ gacha tartibga keltirilgan funksiyalari.

Shuning uchun "shakl"lar juftlarini matrisalarni raqamli usul (metod) asosida ko'paytirish natijasida topish mumkin. Ammo faza haqidagi axborot yo'qligi uchun UDA tez korrelyatsiya (korrelyatsiya oralig'i kichik)larni va o'ramlarni hisoblash uchun yaroqsiz.

(2.17) tenglik UDA k nchi elementini diskret signal har bir elementi x ni k ketma-ketlikli Uolsh funksiyasiga ko'paytirishi va k ning hamma qiymatlari uchun qo'shish orqali olish mumkin $k = 0,1,...,N-1$. k ning hamma elementlari uchun uni matrisa ko'rinishida yozish mumkin

$$\mathbf{X}_k = x_i \mathbf{W}_{ki} . \tag{2.29}$$

bunda $x = [x\ x\ x\ ...x\ _{-}]$ – ma'lumotlar ketma-ketligi.

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & & W_{0,N-1} \\ W_{11} & W_{12} & & W_{1,N-1} \\ ... & ... & & \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

– Uolsh almashtirishi matrisasi, $X = [X\ X\ X\ ...X\ _{-}]$ – $(N-1)$ UDA matrisasi tashkil etuvchilari.

Alohida ta'kidlaymiz, W – bu $N \times N$ tartibli matrisa, bunda N berilgan nuqtalar soni, ya'ni diskret signal nuqtalari. Agar N berilgan nuqtalar soni bo'lsa, u holda Uolsh funksiyasining dastlabki N ta tartibga keltirilganlarini ko'rib chiqish kerak bo'ladi. Ularning har biri N marta diskretizatsiyalanadi, bunda W matrisaning k nchi qatori k komponenta ketma-ketligining N ta diskret qiymatlariga to'g'ri keladi.

2.7. Adamar almashtirishi

Adamar almashtirishi yoki Uolsh-Adamar almashtirishi bu ham mazmunan Uolsh almashtirishi bo'lib, faqat boshqa tartibdagi Uolsh funksiyalari va boshqa almashtirish matrisasi qatoridir. Bunday o'rin almashtirishlar natijasida olinadigan Adamar matrisasi, ikkinchi tartibli matrisaning massiv ostini o'z ichiga oladi. 2.6-rasmda Adamarning 8×8 tartibli matrisasi ko'rsatilgan bo'lib, u H ko'rinishida belgilanadi.

Uni matrisalar orqali yozish mumkin

$$^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad - {}^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

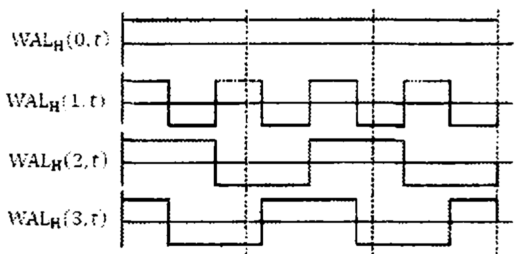
Adamarning har qanday $2N$ tartibli matrisasini H dan rekursiv shaklda olish mumkin, ya'ni

$$
{}^{2N}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} {}^{N}\mathrm{H} & {}^{N}\mathrm{H} \\ {}^{N}\mathrm{H} & {}^{N}\mathrm{H} \end{bmatrix}. \tag{2.30}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & i \rightarrow \\
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

2.6-rasm. Adamarning 8×8 tartibli almashtirish matrisasi

Bu rekursivlik xossasidan Uolsh funksiyasini Adamar tomonidan aniqlangan tartibda joylashtirish natijasida olingan Uolsh-Adamar tez almashtirishini UDAga nisbatan ancha katta tezlik bilan hisoblash mumkin. Adamar tartibida joylashgan Uolsh (yoki tabiiy tartibda joylashgan) funksiyasi 2.7-rasmda ko'rsatilgan.



2.7-rasm. Adamar 4×4 tartibli almashtirish matrisasi uchun diskretizatsiyalash vaqtini ko'rsatuvchi $n=7$ gacha Adamar tartibida joylashgan Uolsh funksiyasi

2.8. Veyvlet almashtirishi

Geyzenberg noma'lumlik (noaniqlik) fizik prinsipiga asosan, bir vaqtning o'zida x zarrachaning holati va uning impulsi p ni aniq bilish mumkin emas. Amalda

$$xp \geq h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Dj·s}, \tag{2.31}$$

bunda h – Plank doimiysi. Eynshteynning $E = mc$ tenglamasi asosida bu prinsipni signallarga ishlov berish sohasida ham qo'llash mumkin. Bunda Geyzenberg prinsipi quyidagicha ta'riflanadi: bir vaqtning o'zida har qanday aniqlik bilan vaqt va chastotani aniqlash mumkin emas, ya'ni

$$\Delta f \cdot T \geq 1, \tag{2.32}$$

bunda Δf va T chastota va vaqt bo'yicha farqlanishni ifodalaydi. Agar chastota qiymati yuqori aniqlik bilan farqlansa (aniqlansa), u holda chastota nisbatan kam aniqlik bilan baholanadi va aksincha.

Natijada bir vaqtning o'zida signal tashkil etuvchilari chastotasini va uning paydo bo'lish vaqtini yoki signal turli chastotali tashkil etuvchilarini vaqt bo'yicha ajratish talab darajasidagi yuqori aniqlik bilan o'lchash yetarli darajada murakkab bo'lishi mumkin. Bu holat agar signal yuqori chastotali tashkil etuvchilardan iborat bo'lsa va ular vaqt sohasida uzoq davomiyli tashkil etuvchilarga juda ham yaqin joylashgan bo'lsa va ular ham o'z vaqtida chastota sohasida yaqin joylashgan bo'lsa, hamda turli onlar (vaqtlar)da hosil bo'lsa yuz berishi mumkin.

Bunday signallar davriy bo'lmaydi. Bu chastota-vaqt tahlili umumiy muammosini yechish uchun Veyvlet almashtirishdan foydalaniladi (wavelet transform), u nostasionar signallarni tahlil etish vositasi hisoblanadi. Veyvlet almashtirishdan signallarni filtrlashda, shovqinlarni yo'qotishda, sinulyarlik joyini topish va ularning taqsimlanishini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Fure almashtirishida signal qiymati darajasi ko'rsatkichida mavhum bo'lgan hissa (vesovoy) koeffisienti bo'lsa va argument garmonik shaklda bo'lib chastotaga bog'liq bo'lsa, ya'ni sinusoidal tashkil etuvchi bo'lsa, Veyvlet almashtirishda xususiy hissa koeffisientlari qiymati sifatida Veyvlet funksiyalardan foydalaniladi.

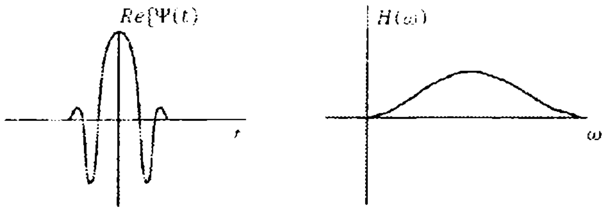
Hamma Veyvlet funksiyalar asosiy (bazaviy) Veyvlet funksiyasidan olinadi. Ba'zi hissalar bo'lishini ta'minlash uchun bir qator asosiy (bazaviy) funksiyalardan foydalaniladi. Talab etiladigan xossalarga ega bo'lish uchun Veyvlet funksiya tebranishlar shaklida bo'lib, doimiy tashkil etuvchisi bo'lmasligi kerak, spektri ma'lum bir kichik polosada joylashgan bo'lishi, kichik vaqt ichida nolga teng qiymatgacha kichiklashishi va aksincha, kichik vaqt oralig'ida o'zining eng katta qiymatiga ega bo'lishi kerak. Bu xususiyat Veyvlet almashtirish bir qiymatli bo'lishiga kafolat beradi. Asosiy funksiyani $\Psi(t)$ ko'rinishida yozish mumkin. Misol uchun, Morlet yoki Gauss modifikatsiyalangan asosiy funksiyasi (Morle veyvleti) quyidagicha ifodalanadi

$$\Psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}. \tag{2.33}$$

Uning Fure ko'rinishi

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}} \qquad (2.34)$$

Bu ikki signal 2.8-rasmda keltirilgan bo'lib, bundan ko'rinadiki $\Psi(t)$ funksiya yuqorida keltirilgan talablarga javob beradi, ya'ni tebranuvchan va nolgacha kichiklashadi.



2.8-rasm.Modifikatsiyalashtirilgan Gauss yoki Morlet, $\Psi(t)$ ona (asosiy) veyvlet funksiyasi va uning Fure ko'rinishi $H(\omega)$

Qolgan (qiz, ikkilamchi) funksiyalar birlamchi asosiy funksiyalar masshtabini o'zgartirish natijasida olinadi, bular funksiyalar oilasini tashkil etadilar. Har bir ikkilamchi (qiz) funksiyani quyidagicha ifodalash mumkin

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\{(t-\tau)/a\}.$$

bunda a – masshtabni o'zgartirish o'zgaruvchan koeffisienti, τ – olib o'tish o'zgarmas koeffisienti. Agar a ning masshtabi kattalashsa funksiyaning amplitudasi va argumenti kichiklashadi. Amplituda berilgan qiymatida argumentning kichiklashishi chastotaning kichiklashishini anglatadi.

Masshtabni o'zgartirish koeffisienti a va olib o'tish o'zgarmas koeffisienti τ yordamida katta va kichik (turli) amplitudali, yuqori va past (turli) chastotali funksiyalarni yaratish mumkin va ularni vaqtning turli onlariga joylashtirish mumkin.

Shunday qilib turli vaqt oralig'iga joylashgan turli chastotali tashkil etuvchilarga ega nostasionar signallarni turli veyvlet funksiyalar yig'indisi orqali ifodalash mumkin. Veyvlet funksiyasidan shu maqsadlarda foydalaniladi.

Uzluksiz veyvlet almashtirishni (UVA) (a,τ) quyidagicha ifodalash mumkin

$$\text{UVA}\,(a,\tau) = \left(1/\sqrt{a}\right)\int s(t)\Psi\{(t-\tau)/a\}dt. \qquad (2.35)$$

Bu tenglama paramterlarini diskretlash natijasida diskret parametrli veyvlet almashtirishi (DPVA) (m,n) ni olish mumkin, u quyidagicha aniqlanadi

$$\mathrm{DPVA}(m,n) = a_0^{-m/2} \int s(t)\, \Psi\{(t - n\tau_0 a_0^m)/a_0^m\} dt, \qquad (2.36)$$

bunda quyidagi almashtirishlar amalga oshirilgan: $a = a$, $\tau = n\tau\, a$ Bu almashtirishlarda a va τ lar a va τ lar uchun diskretizatsiyalash oralig'i; m va n lar esa butun sonlar.

Ko'p hollarda $a = 2a$, $\tau = 1$ ga teng deb olinadi. Yuqoridagilarni e'tiborga olinsa

$$\mathrm{DPVA}(m,n) = 2^{-m/2} \int s(t)\, \Psi\{(t - n2^m)/2^m\} dt =$$

$$= 2^{-m/2} \int s(t) \Psi\{2^{-m} t - n\}\, dt.$$

Bu vaqt o'qini 2^{-} marotaba kengaytiradi, natijada veyvlet funksiya vaqt bo'yicha musbat tomonga $2\ n$ kattalikka suriladi.

Veyvlet funksiyani vaqt bo'yicha diskretizatsiyalash, diskret vaqtli veyvlet almashtirishi (DVVA)ni beradi, u quyidagicha aniqlanadi

$$\mathrm{DVVA}(m,n) = a_0^{-m/2} \sum_k s(k) \Psi(a_0^{-m} k - n\tau_0). \qquad (2.37)$$

Agar qaytadan $a = 2a$ va $\tau = 1$ deb hisoblasak u holda DVMI quyidagicha aniqlanadi

$$\mathrm{DVVA}(m,n) = 2^{-m/2} \sum_k s(k) \Psi(2^{-m} k - n). \qquad (2.38)$$

(2.38) ifoda veyvlet diskret almashtirishi hisoblanadi.

Shunday qilib, veyvlet diskret almashtirishi uzluksiz veyvlet almashtirishidan ~~masshtab parametri a ni, olib o'tish o'zgarmas koeffisienti τ va~~ vaqtli diskretizatsiyalash, so'ngra diskretlash oralig'i qiymatlari $a = 2$ va $= 1$ deb hisoblash natijasida olinadi.

Veyvlet almashtirishlardan signallar chastota-vaqt tarkiblarini o'rganishda foydalanishdan tashqari, ulardan signallarni filtrlash, ya'ni shovqinning qandaydir qismini olib tashlashda ham foydalanish mumkin. Buning uchun signal tashkil etuvchilarga ajratilishi kerak. So'ngra taqqoslash asosida shovqin tashkil etuvchilari olib tashlanadi. Va nihoyat shovqinlardan tozalangan signal tashkil etuvchilari veyvlet funksiyalari orqali qayta tiklanadi. Uzluksiz veyvlet almashtirishidan foydalanilganda signalni qayta tiklash (teskari almashtirishi) ifodasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$s(t) = \frac{1}{C_\psi} \iint UVA(a,\tau) \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\} \Psi\{(t-\tau)/a\} \left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\right\} da\,dt, \qquad (2.39)$$

bunda $$C_\psi = \int_0^\infty \{|H(\omega)|^2/\omega\} d\omega < \infty .$$

va $H(\omega)$ – asosiy impuls $\Psi(t)$ ning Fure ko'rinishi.

2.9. Gilbert almashtirishi

Aloqa kanallari orqali uzatiladigan signallar vaqtning haqiqiy funktsiyasi bo'ladi. Ammo bir qator signallar uzatish muammolariga tegishli masalalarni echishda signalni vaqt funktsiyasi bo'lgan elementar kompleks tashkil etuvchilar yig'indisi sifatida qarashni taqazo etadi yoki signalning o'zini to'liq kompleks funktsiya deb tadqiq etishga ehtiyoj tug'iladi, ya'ni

$$\dot{s}(t) = s(t) + js^*(t) = u(t)e^{j\psi(t)} \qquad (2.40)$$

bunda, $u(t)$ va $\psi(t)$ – signal o'rovchisi va fazasi. Bu holda haqiqiy signal kompleks signal orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$s(t) = R\,\dot{s}(t) = R\,u(t)e^{\,\psi} = u(t)\cos\psi(t) \qquad (2.41)$$

Signalni bu shaklda ifodalashdan tor polosali signallarni tadqiq qilishda keng foydalaniladi.

Agar $s(t)$ va $s^*(t)$ Gilbert o'zgartirish juftligi orqali bir-biriga bog'liq bo'lsa, $s(t)$ signal analitik signal deb ataladi, ya'ni

$$\left.\begin{aligned} s^*(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau \\ s(t) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^*(\tau)}{t-\tau}d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

shaklida bog'langan bo'lsa, bunday signal analitik signal hisoblanadi. (2.42) ifodalardagi integrallar Koshining asosiy qiymati sifatida qabul qilinadi. $s^*(t)$ funktsiya bilan Gilbert bo'yicha moslashgan hisoblanadi. $s(t)$ va $s^*(t)$ ni Gilbert sharti asosida tanlangan bo'lsa, u holda signal o'rovchisi va fazasi quyidagicha aniqlanadi:

$$u(t) = \sqrt{[s(t)]^2 + [s^*(t)]^2}, \qquad (2.43)$$

$$\psi(t) = arctg\frac{s^*(t)}{s(t)}. \qquad (2.44)$$

Agar $s(t)$ signal spektri kengligi o'zining o'rtacha chastotasi ω dan kichik bo'lsa, u holda bu signalning amplitudasi va fazasi signal $s(t)$ ning o'ziga nisbatan sekin o'zgaradi. Gilbert to'g'ri va teskari bir juft o'zgartirishlari asosida $s(t) = \cos\omega t$ signalga $s^{\cdot}(t) = \sin\omega t$ signal va $s(t) = \sin\omega t$ signalga $s^{\cdot}(t) = -\cos\omega t$ signal kompleks moslashganligini tasdiqlash mumkin. Xuddi shunga o'xshash $s(t) = \sum(a \cos k\omega t + b \sin k\omega t)$ signal bilan $s^{\cdot}(t) = \sum(a \sin k\omega t - b \cos k\omega t)$ signal kompleks moslashgan bo'ladi.

Shunday qilib $s(t) = A\cos\omega t$ oddiy garmonik tebranish signalga $s^{\cdot}(t) = A\cos\omega t + jA\sin\omega t = Ae^{j\omega t}$ analitik signal mos keladi.

Agar signal Fure integrali ko'rinishida bo'lsa:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{2.45}$$

Uning chastota spektri quyidagicha ifodalanadi:

$$s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt = \Gamma[s(t)] \tag{2.46}$$

$s(t)$ va $s^{\cdot}(t)$ signallarning spektri o'zaro quyidagi bog'lanishga ega:

$$\Gamma[s(t)] = [-j\,\mathrm{sgn}(\omega)]s(j\omega), \tag{2.47}$$

bunda $\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} +1, & agar\ \omega > 0; \\ 0, & agar\ \omega = 0; \\ -1, & agar\ \omega < 0. \end{cases}$

Shunday qilib, Gilbert o'zgarishini $s(t)$ signalning hamma spektral tashkil etuvchilarini $-\frac{\pi}{2}$ ga suruvchi elektr zanjiridan o'tishi deb hisoblash kerak. Ushbu elektr zanjirining chastota va faza tavsiflari quyidagicha bo'ladi:

$$K(j\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega), \qquad h(t) = \frac{1}{\pi t}.$$

(2.47) ifodani (2.40) ifodaga kiritish natijasi $S^{\cdot}(t)$ signalning spektri $S(j\omega)$ ning "bir tomonlama" ekanini ko'rsatadi:

$$\dot{s}(j\omega)=\begin{cases}2s(j\omega), & agar \quad \omega>0;\\ s(0), & agar \quad \omega=0;\\ 0, & agar \quad \omega<0.\end{cases} \tag{2.48}$$

Bu analitik sigalning juda muhim hossasi hisoblanadi.

Davriy signal $s(t)$ ning Gilbert sharti bo'yicha moslashgan $s^{\prime}(t)$ funktsiyasi ham $s(t)$ signal davriga teng bo'ladi. $s(t)$ va $s^{\prime}(t)$ signallar ularning davri T oralig'ida o'zaro ortogonal bo'ladi, ya'ni

$$\int s(t)s^{\prime}(t)dt=0.$$

Agar $s(t)$ va $s(t)$ ortogonal signallardan birini uning Gilbert o'zlashtirishi sharti asosida moslashtirilganiga almashtirilganda ham ortogonallik hususiyati saqlansa, bunday signallar kuchaytirilgan ma'noda ortogonal signallar deb ataladilar, ya'ni

$$\begin{aligned} &s(t)\cdot s(t)=\frac{1}{T}\int s(t)\cdot s(t)dt=0;\\ &s(t)\cdot s^{\prime}(t)=\frac{1}{T}\int s(t)\cdot s(t)dt=0, \qquad agar \qquad i\neq j \end{aligned} \tag{2.49}$$

Bundan tashqari bunday signallardan birini uning $s(t)$ kompleks moslashganiga almashtirilganda ham o'zaro ortogonallik hususiyati saqlanib qoladi, ya'ni

$$s(t)\cdot s(t)=\frac{1}{T}\int s(t)\cdot s(t)dt=0; \qquad agar \qquad i\neq j \tag{2.50}$$

Analitik signal tushunchasi har qanday signalni kompleks shaklga keltirish va uning o'rovchisini hamda fazasini aniq aniqlash imkoniyatini beradi. Determinant (o'zgarish qonuniyati ma'lum funktsiya) va tasodifiy signallar analitik shaklga keltirilishi mumkin. Signalni analitik shaklga keltirish natijasida, uning o'rovchisi va fazasi o'zgarishini alohida-alohida tadqiq qilish mumkin bo'ladi. Masalan, tasodifiy jarayon tadqiq etilganda uning oniy qiymatlari bilan shug'ullanish o'rniga, uning o'rovchisi yoki fazasini tadqiq etish bilan chegaralanish mumkin.

Umuman olganda $x(t)$ va $x^{\cdot}(t)$ jarayonlarning spektrlari va korrelyatsion funktsiyalari bir xil: $G\ (\omega) = G\ (\omega)$, $B\ (\tau) = B\ (\tau)$. $x(t)$ va $x^{\cdot}(t)$ jarayonlarning o'zaro energetik spektrlari $G\ (\omega) = jG\ (\omega)$ o'zaro korrelyatsiya funktsiyasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$B\ (\tau) = -B\ (\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{\infty} G\ (\omega)\sin\omega\tau d\omega \qquad (2.51)$$

Tasodifiy jarayon taqsimot qonuni bilan uning o'rovchisi $s(t)$ va fazasi $\psi(t)$ taqsimot qonunlari bir-birlariga bog'liq, tasodifiy jarayonning ehtimollik zichligi taqsimot qonuni $P(x)$ orqali, uning o'rovchisi va fazasi ehtimolligi zichligi taqsimoti qonuni $P(s)$ va $P(\varphi)$ ni aniqlash mumkin.

Nazorat savollari

1. *Davriy signalni Fure qatoriga yoying va uning tashkil etuvchilari haqida so'zlab bering.*
2. *Fure to'g'ri va teskari almashtirishi formulasini yozing va tushuncha bering.*
3. *Fure to'g'ri va teskari diskret almashtirishidan fanday signallar va qaysi hollarda foydalaniladi?*
4. *Fure diskret kosinus almashtirishi haqida tushuntirish bering.*
5. *Uolsh almashtirishi haqida tushuncha bering.*
6. *Adamar almashtirishi haqida tushuncha bering.*
7. *Veyvlet almashtirish haqida tushuncha bering.*
8. *Gilbert almashtirish haqida tushuncha bering.*

3. Z-ALMASHTIRISH

Diskret vaqt signal va tizimlariini analiz va loyihalashda qo‘llanilishi eng qulay bo‘lgan almashtirish bu z-almashtirish hisoblanadi.

3.1. Diskret vaqt tizimlari

Diskret vaqt tizimi – bu kirishiga $x(n)$ signal ketma-ketligi berilganda chiqishida $y(n)$ ketma-ketligini hosil qilish matematik algoritmi. Diskret vaqt tizimlariga quyidagilarni misol qilib keltirish mumkin: raqamli kontroller (nazoratlash qurilma)lari, spektr raqamli analizatorlari va raqamli filtrlar.

Diskret vaqt tizimi chiziqli va nochiziqli, vaqt bo‘yicha ko‘rsatkichlari o‘zgarmas (invariant) yoki o‘zgaruvchan bo‘lishi mumkin.

Diskret vaqt tizimi chiziqli deb ataladi, agar bu tizimga nisbatan aks ta’sir uning kirishiga bir vaqtda bir necha signal berilgandagi qiymati har bir kirish signallari alohida-alohida unga ta’sir etgandagi alohida-alohida aks ta’sirlar yig‘indisiga teng bo‘lsa.

Misol uchun, uning birinchi kirishiga $x(n)$ signal berilsa chiqishida $y(n)$ hosil bo‘ladi va ikkinchi kirishiga $x(n)$ signal berilsa chiqishida $y(n)$ hosil bo‘ladi. U holda tizimning har ikki ta’sir signaliga aks ta’siri, ya’ni chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \to a_1y_1(n) + a_2y_2(n). \qquad (3.1)$$

bunda a va a – har qanday o‘zgarmas kattalik (konstanta).

Diskret vaqt tizimi (vaqtga bog‘liq emas) invariant yoki unga signal ta’sir etish vaqtiga bog‘liq emas deb hisoblanadi, agar uning chiqishidagi signal $y(n)$ kirishiga qaysi vaqtda signal $x(n)$ berilganiga, ya’ni $x(n-k)$ ga bog‘liq emas, bunda k signal kechikish vaqti. Misol uchun, agar uning kirishiga $x(n)$ signal berilsa chiqishida $y(n)$ hosil bo‘ladi, agar $x(n-k)$ signal berilsa chiqishida $y(n-k)$ signal hosil bo‘ladi, ya’ni

$$x(n) \to y(n). \qquad (3.2a)$$

$$x(n-k) \to y(n-k). \qquad (3.2б)$$

bo‘ladi, ya’ni kirish signali qancha vaqtga kechiksa chiqish signali ham shuncha vaqtga kechikadi. Chiziqli invariant tizim (ChIT) kirish va chiqish signallari orasidagi bog‘liqlik o‘rovchi (svertka) yig‘indisi orqali beriladi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \qquad (3.3)$$

bunda $h(k)$ – tizim impuls xarakteristikasi. $h(k)$ ning qiymati diskret vaqt tizimini vaqt bo'yicha o'zgarishini to'liq aniqlaydi. Agar ChIT impuls xarakteristikasi quyidagi talabga javob bersa, u barqaror hisoblanadi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)| < \infty. \qquad (3.4)$$

Bu shart agar $h(k)$ cheklangan davomiylikka yoki k kattalashishi bilan $h(k)$ nolga intilganda kuchga ega.

Faqat kirishida signal bo'lganda chiqishida aks signal hosil bo'ladigan tizim – fizik jihatdan amalga oshirilishi mumkin bo'lgan tizim deb ataladi. Umuman olganda, diskret vaqt ketma-ketligida mavjud $x(n)$ yoki diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasi fizik jihatdan amalga oshirish mumkin bo'lgan tizimlar uchun vaqt nolinchi onigacha nolga teng bo'ladi, ya'ni $x(n)=0$, $n<0$ yoki $h(k)=0$, $k<0$.

3.2. To'g'ri va teskari z-almashtirishlar

$x(n)$ ning n ning hamma qiymatlari uchun haqiqiy bo'lgan z-almashtirishni aniqlaymiz

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \qquad (3.5)$$

bunda z – kompleks o'zgaruvchi.

Aks ta'siri mavjud tizimlarda $x(n)$ faqat $0<n<\infty$ oralig'ida nolga teng bo'lmaydi va (3.5) tenglamadan bir tomonlama z-almashtirish deb ataladigan quyidagi almashtirish ifodasini olamiz

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}. \qquad (3.6)$$

~~teskari z-almashtirishi~~ $\cancel{(z^{-})}$ ~~$x(n)$ diskret vaqt ketma-ketligini uning z-ko'rinishi~~ orqali tiklash imkoniyatini beradi. z teskari z-almashtirishi SRIBda keng foydalaniladi, misol uchun raqamli filtrlarning impuls xarakteristikasini aniqlashda. Simvolik shaklda z-almashtirishi quyidagicha aniqlash mumkin:

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)]. \qquad (3.7)$$

bunda $X(z)$ – $x(n)$ ketma-ketlikning z-ko'rinishi, Z^{-} esa z-teskari almashtirish amalini anglatuvchi simvol.

$x(n)$ ketma-ketlik albatta aks ta'sir hosil bo'lishiga olib keladi deb hisoblab, (3.6) tenglamadan $X(z)$ ning z-ko'rinishini darajali quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \ldots \qquad (3.8)$$

(3.8) qatordan ko'rinadiki ketma-ketlik qiymatlari $x(n)$ – bu z^{-} ($n = 0, 1, ...$) koeffisientlari bo'lib, shuning uchun ularni to'g'ridan-to'g'ri aniqlash mumkin. Amaliyotda, ko'p hollarda $X(z)$ ni z^{-} dan yoki unga teng kuchli bo'lgan z dan olingan ikki ko'phadning nisbati orqali ifodalsh mumkin:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_M z^{-M}}. \quad (3.9)$$

$x(n)$ ning bu ko'rinishdagi z-almashtirishini quyidagi usullardan biri yordamida aniqlash mumkin:

a) darajali qatorga yoyish usuli;

b) elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko'rinishida ifodalash usuli;

v) ayirish usuli (vichet).

3.2.1. Darajali qatorga yoyish usuli

Agar $X(z)$ aks ta'sirli ketma-ketlik (3.6) z-almashtirishi berilgan bo'lsa, u holda uni z^{-} yoki z ga nisbatan ustun (stolbik)ga bo'lish sintetik bo'lish usuli deb ataluvchi usuldan foydalanib cheksiz qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + ... + a_M z^{-M}} =$$
$$= x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + x(3) z^{-3} + \cdots \quad (3.10)$$

Bu usuldan foydalanilganda $X(z)$ funksiyasining maxraji va surati dastlab z ning darajasi kamayuvchi shaklida yoki z^{-} ning darajasi kattalashuvchi qator sifatida ifodalanadi, so'ngra ularni bo'lish natijasida xususiy qiymati topiladi.

3.2.2. Elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko'rinishida ifodalash usuli

Bu usuldan foydalanilganda dastlab z-almashtirish kasr sonlar nisbati shaklida yoyiladi. Har bir elementar kasrning z-teskari almashtirishi topiladi. Bu natijalarni qo'shish natijasida umumiy z-almashtirish olinadi. Amalda ko'p hollarda z-almashtirish z yoki z^{-} ko'p hadlilarning nisbati ko'rinishda beriladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + ... + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_M z^{-M}} =$$
$$= x(0) + x(1) z^{-1} + x(2) z^{-2} + x(3) z^{-3} + \ ... \quad (3.11)$$

Agar $X(z)$ funksiyaning qutblari birinchi tartibli bo'lsa va $N = M$ bo'lsa, u holda uni quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1-p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1-p_2 z^{-1}} + \dots + \frac{C_M}{1-p_M z^{-1}} =$$

$$= B_0 + \frac{C_1 z}{z-p_1} + \frac{C_2 z}{z-p_2} + \dots + \frac{C_M z}{z-p_M} = B_0 + \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k z}{z-p_k}. \qquad (3.12)$$

bunda p – $X(z)$ funksiyaning qutblari, C – elementar kasrlarning koeffisientlari va

$$B_0 = b_N / a_N. \qquad (3.13)$$

C koeffisientlarini ba'zan $X(z)$ funksiyaning ayirmasi (vichet) deb ham ataladi.

Agar (3.11) tenglamada suratning darajasi maxrajning darajasidan kichik bo'lsa, ya'ni $N < M$ bo'lsa, u holda B nolga teng bo'ladi. Agar $N > M$ bo'lsa, u holda $X(z)$ ni $N \le M$ ni ko'rinishida olish uchun dastlab uni surat va maxrajning z ni darajasi kamayib boruvchi ko'rinishda yozilgan ifodasini ustunga bo'lish kerak bo'ladi. Qoldiqni (3.12) tenglamada keltirilgan ko'rinishda ifodalash mumkin.

C koeffisientning p qutb bilan bog'liq qiymatini (3.12) tenglamaning chap va o'ng tomonini $(z - p)/z$ ga ko'paytirish, so'ngra $z = p$ almashtirishni amalga oshirib topish mumkin:

$$C_k = \frac{X(z)}{z}(z - p_k)|_{z=p_k}. \qquad (3.14)$$

Agar $X(z)$ funksiya bir yoki bir necha birinchi tartiblidan katta qutblarga ega bo'lsa (ya'ni mos keluvchi qutblarga), u holda buni e'tiborga olish uchun (3.12) tenglamaga qo'shimcha hadlar qo'shish kerak bo'ladi.

Misol uchun, agar $X(z)$ funksiya $z = p$ nuqtada m-tartibli qutbga ega bo'lsa, u holda elementar kasrlarga yoyishga quyidagi ko'rinishdagi hadlar kirishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z-p_k)^i}. \qquad (3.15)$$

D koeffisientlarining qiymatlarini quyidagi bog'liqlikdan topish mumkin:

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!}\frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}}\left[(z - p_k)^m \frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=p_k}. \qquad (3.16)$$

3.2.3.Ayirish usuli

Bu usulda z^{-} kontur integralini hisoblash orqali aniqlanadi:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz\,. \qquad (3.17)$$

bunda C – bu integrallash konturi bo'lib, $X(z)$ ning hamma qutblarini o'z ichiga oladi (qamrab oladi). Rasional ko'phadlar uchun (3.17) tenglamadan kontur bo'yicha integral kompleks o'zgaruvchilar nazariyasi asosiy natijasiga asoslanib, ayirishlar (vichet) haqidagi Koshi teoremasi yordamida aniqlanadi:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz =$$

$$= z^{-}X(z) \text{ ning } C \text{ ichidagi hamma qutblari ayirmalari yig'indisi} \qquad (3.18)$$

Avvalgi mulohazalarda C ni elementar tashkil etuvchilarga yoyish koeffisientini $X(z)$ funksiyaning ayirmalari deb ataladi deb aytib o'tilgan va uning qiymatlarini hisoblash usullari keltirilgan edi. Shuni eslab qolish kerakki, har bir ayirma C qutb p bilan bog'liq. Bu usulda esa $z^{-}X(z)$ ning p qutbdagi ayirmasi ($X(z)$ funksiyaning ayirmalari emas) quyidagi ko'rinishda beriladi:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-p_k)F(z)]|_{z=p_k}\,. \qquad (3.19)$$

bunda $F(z)=z^{-}X(z)$, m – bu p nuqtadagi qutb tartibi. $\mathrm{Res}[F(z), p\,]$ – $F(z)$ ning $z=p$ nuqtadagi ayirmasi (vicheti). Oddiy (alohida) qutb uchun (3.19) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mathrm{Res}[F(z), p_k] = (z-p_k)F(z) = (z-p_k)z^{n-1}X(z)|_{z=p_k}.$$

3.2.4. Z-teskari almashtirish usullarini taqqoslash

Ko'rib chiqilgan z-teskari almashtirishlarini hisoblash usullarini taqqoslaymiz. Darajali qatorga yoyish usulining kamchiligi shundan iboratki, bu usul analitik ko'rinishdagi yechimni bermaydi (ba'zan oddiy hollarda uni aniqlash mumkin), ammo u sodda bo'lib kompyuter yordamida hisoblashda foydalanish mumkin. Ammo u tabiatan rekursiv xarakterga egaligi uchun z-teskari almashtirishning berilgan nuqtalari ko'p bo'lsa xatolik oshib borishi mumkin.

Elementar kasrlarga yoyish usuli va vichetlar usuli analitik ko'rinishda natija olish imkonini beradi. Bu usullarning asosiy kamchiligi maxraj ko'p hadligi ko'paytkichini yoyish talab etilishi, ya'ni $X(z)$ funksiyaning qutblarini topish talab etilishi hisoblanadi. Agar $X(z)$ funksiya yuqori tartibli bo'lsa va funksiya yoyilgan shaklda berilmagan bo'lsa, u holda uning qutblarini qidirish yetarli darajada qiyin masala hisoblanadi.

3.3. Z-almashtirishning xossalari

Quyida signallarga raqamli ishlov berishda keng foydalaniladigan z-almashtirishning ba'zi foydali xossalarini qisqacha keltiramiz.

1. *Chiziqlilik.* Agar $x(n)$ va $x(n)$ ketma-ketliklar $X(z)$ va $X(z)$ shaklidagi z-ko'rinishlarga ega bo'lsa, u holda z-ko'rinishlarning chiziqli kombinatsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow aX_1(z) + bX_2(z). \tag{3.20}$$

2. *Kechikish yoki siljish.* Agar $x(n)$ ketma-ketlikning z-ko'rinishi $X(z)$ bo'lsa, u holda m elementga kechikkan ketma-ketlikning z-ko'rinishi $z^{-} X(z)$ bo'ladi. Bu xossadan diskret vaqt tizimlari uzatish funksiyasi z ni vaqt bo'yicha farqlanuvchi tenglamaga aylantirishda keng foydalaniladi

$$x(n) \longrightarrow X(z).$$

$$x(n-m) \rightarrow z^{-m}X(z).$$

3. *Svertka (o'ram).* Kirish signali $x(n)$ va impuls xarakteristikasi $h(k)$ bo'lgan diskret vaqt tizimi berilgan bo'lsa, tizim chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{3.21a}$$

z-ko'rinishlar orqali tizim kirish va chiqishi quyidagicha bog'langan:

$$Y(z) = H(z)X(z). \tag{3.21б}$$

bunda $X(z)$, $H(z)$ va $Y(z)$ lar mos ravishda $x(n)$, $h(k)$ va $y(n)$ ketma-ketliklarning z-ko'rinishlari. Agar $X(z)$ va $H(z)$ berilgan bo'lsa, u holda $y(n)$ ni $Y(z)$ ning teskari z-almashtirishi orqali topish mumkin. Yuqoridagidan ko'rinadiki (3.21*a*) tenglamadan svertka (o'ram) olish jarayoni z-sohada ko'paytirish amaliga aylanib qoladi.

4. *Differensiallash.* Agar $X(z)$ orqali $x(n)$ ketma-ketlik z-ko'rinishi ifodalansa, u holda $nx(n)$ ning z-ko'rinishini $X(z)$ ni differensiallash orqali topish mumkin

$$x(n) \rightarrow X(z).$$

$$nx(n) \rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}. \tag{3.22}$$

Z-almashtirishning bu xossasidan $X(z)$ yuqori tartibli qutblarga ega bo'lganda, uning teskari z-almashtirishini hisoblashda foydalaniladi.

3.4. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ifodalash

Amalda foydalaniladigan ko'pgina diskret vaqt tizimlari uchun z-almashtirishli, ya'ni tizim uzatish funksiyasi $H(z)$ ni uning qutbi va noli orqali ifodalash mumkin. Misol shaklida, N-tartibli diskret vaqt oddiy filtri uchun quyidagi z-almashtirishni ko'rib chiqamiz ($N = M$ bo'lgan holat uchun):

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \qquad (3.23)$$

bunda

$$N(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_N,$$
$$D(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \dots + a_N .$$

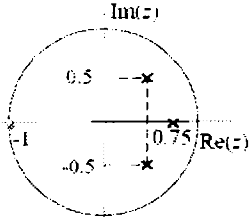
a va b – filtr koeffisientlari.

Agar $H(z)$ funksiya $z = p\,, p\,, \dots, p$ nuqtalarda qutblarga ega bo'lsa va $z = z\,, z\,, \dots, z$ nuqtalarda nolga teng bo'lsa, u holda $H(z)$ funksiyani ko'paytmalarga yoyish va quyidagi ko'rinishga olib kelish mumkin:

$$H(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)}, \qquad (3.24)$$

bunda z – i-nchi nol, p – i-nchi qutb va K – kuchaytirish koeffisienti. z-almashtirishning qutblari deb z ning funksiya $H(z)$ ni cheksizlikka teng bo'lishiga olib keluvchi qiymatlariga aytiladi. z ning $H(z)$ ni nolga teng bo'lishini ta'minlovchi qiymatlari uning nollari deb ataladi. $H(z)$ funksiyaning qutb va nollari haqiqiy yoki kompleks bo'lishi mumkin. Agar qutb va nollar kompleks bo'lsa, u holda ular funksiyaga kompleks moslashgan juftlik bo'lib kiradilar, chunki a va b koeffisientlar haqiqiy bo'lishi kerak. (3.24) tenglamadan ko'rinadiki, agar $H(z)$ funksiyaning qutb va nollari joylashishi ma'lum bo'lsa, u holda $H(z)$ funksiyani o'zgarmas kattalik (konstanta)gacha aniqlik bilan qayta tiklash mumkin.

z-ko'rinishdagi axborotni qutb va nollarning digrammasi ko'rinishida tasvirlash qulay (3.1-rasm). Ushbu diagrammada qutblarning o'rni (*) bilan belgilangan, nol esa (0) bilan belgilangan. 3.1-rasmdagi misolda $z = 0.5 \pm 0.5i$ va $z = 0.75$ nuqtalarida qutblar joylashgan, nol esa $z = -1$ nuqtada joylashgan.



3.1-rasm. z-almashtirishni qutb (*) va nollar (0) diagrammasi ko'rinishida tasvirlash

Qutb va nollarning diagrammasi diskret vaqt tizimi xossalarini olib beradi. Misol uchun, qutb va nollarning joylashishiga qarab tizimning amplituda-chastota xarakteristikasini va uning qanday darajada barqarorligini bilib olish mumkin. Barqaror tizimlar uchun hamma qutblar, birlik o'lcham (radius)ga ega doira ichida bo'lishi yoki birlik o'lchamli doira nollariga mos bo'lishi mumkin.

Ko'p hollarda z-almashtirishni yoyilgan ko'rinishda ifodalash mumkin emas, uni (3.24) tenglamadagidek ko'p hadlar nisbati sifatida ifodalash mumkin. Bu hollarda $H(z)$ ni uning nol va qutblar z-ko'rinishida ifodalash uchun, maxraj ko'phadligi $D(z)$ va surat ko'phadligi $N(z)$ ning ildizlarini topish kerak bo'ladi.

$ax + bx + c$ ko'rinishida beriladigan ikkinchi tartibli ko'phadning ildizlari quyidagi formula orqali topiladi:

$$\frac{-b \pm (b^2-4ac)^{1/2}}{2a}. \quad (3.25)$$

$N(z)$ va $D(z)$ ko'phadlarning nisbatan yuqori tartibli ildizlarini topish murakkab masala hisoblanadi. Amalda bu ildizlarni topishda raqamli usullardan foydalaniladi yoki Nyuton ~~yoki/hamda Beystou (Baistow) algoritmlaridan~~ foydalaniladi.

3.5. Barqarorlikni tadqiqot qilish

Ko'p hollarda diskret vaqt tizimlarini yaratishda ularning barqarorligini (ustoychivost) tahlil etish kerak bo'ladi. Tizimlar barqarorligining foydali yetarli mezonini quyidagicha ta'riflash mumkin: hamma kirish signallariga tizimning aks ta'siri ham cheklangan bo'lishi kerak. Bu shart KChChCh (kirish cheklash, chiqish cheklash) sharti deb ataladi. Odatda KChChCh tizimi barqaror deb qaraladi faqat quyidagi barqarorlik sharti bajarilsa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty. \quad (3.26)$$

bunda $h(k)$ – tizim impuls xarakteristikasi. Ma'lumki, agar impuls xarakteristikasi cheklangan bo'lsa yuqorida keltirilgan shart bajariladi, chunki impuls xarakteristikalar koeffisienti chekli qiymatga ega bo'ladi. Shunday qilib, barqarorlikni tahlil etishni faqat impuls xarakteristikalari cheksiz davomli tizimlarga nisbatan qo'llash mumkin.

Chiqish signali sathi cheklangan bo'lishi uchun, hamma qutblar birlik radiusli doira ichida bo'lishi shart. Agar qutblar birlik radiusli doira tashqarisida bo'lsa, tizim barqaror emas deb hisoblanadi. Amalda qutbi birlik doira ustida joylashgan tizimlar ham barqaror bo'lmagan tizim deb hisoblanadi yoki potensial nobarqaror deb hisoblanadi, chunki juda kichik qo'zg'atuvchi kuch yoki sezilarli xatolik tizimni barqaror bo'lmagan holatga olib keladi. Bundan birlik doiradagi qutb nolga mos kelgan holatda uning ta'siri bir-birini qoplaydi (kompensatsiya qiladi). Barqaror bo'lmagan tizim impuls xarakteristikasi vaqtga bog'liq shaklda cheksiz kattalashib boradi.

Tizimning barqarorligini nazorat qilish juda oson: z-almashtirish qutblari joylarini aniqlash kerak, agar qandaydir qutb birlik doira ustiga to'g'ri kelsa yoki undan tashqarida bo'lsa tizim barqaror emas deb hisoblanadi (faqat qutb holati birlik doira ustidagi nolga mos kelmasa). Amalda qutblar holatini aniqlash oson masala bo'lmasligi mumkin.

Agar $H(z)$ tizimi z-ko'rinishini ko'phadlarga yoyish mumkin bo'lmasa, oddiy tekshirish usuli bu yetarli sondagi impuls xarakteristikalarini topish va teskari z-almashtirishni hisoblab chiqib grafigini chizishdan iborat. Agar tizim impuls xarakteristikasi vaqt o'tishi bilan cheksiz kattalashib borsa yoki tezda nolga intilsa, u holda tizim barqaror emas yoki juda kam darajada barqaror bo'ladi.

3.6. Farqlanish tenglamasi

Farqlanish tenglamasi diskret vaqt tizimining kirish ma'lumotlari ustidan kerakli chiqish signali uchun real bajaradigan amalini ta'riflaydi. Ko'pgina amaliyotda muhim holatlar farqlanish tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b_k y(n-k). \qquad (3.27)$$

bunda $x(n)$ – kirish signali ketma-ketligi elementi, $y(n)$ – chiqish signali ketma-ketligi elementi, $y(n-k)$ – bitta avvalgi chiqish signali, a va b – tizim koeffisientlari. (3.27) tenglamadan ko'rinadiki, joriy $y(n)$ joriy qiymati ketma-ketligining shu ondagi va bitta avvalgi elementlari va bitta avvalgi chiqish signaliga $y(n-k)$ lar orqali olinadi (aniqlanadi). Z-almashtirishning kechikish xossasidan foydalanib, vaqt diskret tizimi uzatish funksiyasi uchun quyidagi farqlanish tenglamasini olish mumkin va aksincha:

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z).$$

$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z).$$

Shunday qilib (3.27) tenglamani quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} Y(z). \quad (3.28)$$

(3.28) ifodani soddalashtirib z-qiymatlari majmuasi uchun diskret tizim uzatish funksiyasi $H(z)$ ning ifodasini olamiz

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}} \quad (3.29)$$

Agar maxraj b ning hamma qiymatlari nolga teng bo'lsa, u holda (3.27) va (3.28) tenglamalar quyidagi ko'rinishlarni oladilar:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k),$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}. \quad (3.30)$$

Endi chiqish signali $y(n)$ kirish ketma-ketligining faqat shu ondagi va avvalgi elementlariga bog'liq bo'ladi va (3.27) tenglamada ifodalangan chiqish signali avvalgi qiymatiga bog'liq bo'lmaydi. Ushbu holatda a koeffisient tizim impuls xarakteristikasi bo'lib, odatda $h(k)$ simvoli orqali belgilanadi. Bu tur tizimlarni cheklangan impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi, chunki $h(k)$ ketma-ketlik davomiyligi albatta cheklangan bo'ladi. (3.27) va (3.29) tenglamalar orqali ifodalanadigan tizimlar uchun uning maxrajlaridan kamida bittasi nolga teng bo'lmaydi, bunday tizimlar cheksiz impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi. Impuls xarakteristikasi cheksiz tizimlarda qutblardan kamida bittasi nolga teng bo'lmaydi, impuls xarakteristikasi cheklangan tizimlarning esa odatda qutblari bo'lmaydi.

3.7. Impuls xarakteristikasini baholash

Diskret vaqt tizimlarini loyihalashda ko'p hollarda ularning impuls xarakteristikalarini hisoblashga ehtiyoj tug'iladi. Misol uchun tizimni loyihalashda uni amalga oshirish uchun cheklangan impuls xarakteristikasini bilish kerak bo'ladi va cheksiz impuls xarakteristikali tizimni loyihalashda esa uning barqarorligini tahlil etish uchun kerak. Shuningdek tizim chastota xarakteristikasini baholashda ham impuls xarakteristikasidan foydalanish mumkin.

Diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasini uning impuls xarakteristikasi $H(z)$ ga teskari z-almashtirishni amalga oshirish natijasida aniqlash mumkin:

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)], \quad k = 0,1,\dots$$

Agar $H(z)$ ning z-almashtirishini darajali qatorga yoyilsa, ya'ni

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \ldots \quad (3.31)$$

bo'lsa,u holda z-almashtirish koeffisientlari to'g'ridan-to'g'ri $H(z)$ impuls xarakteristikasiga teng bo'ladi.

Impuls xarakteristikani diskret vaqt tizimining $u(n)$ birlik sakrashning $n=0$ bo'lganda birga teng bo'lishi va n ning boshqa hamma qiymatlari uchun nolga teng bo'lgan tizim aks ta'siri deb qaralishi mumkin. Bunday qarash agar tizim kirish signali $x(n)$ ni birlik sakrash impulsi $u(n)$ ga teng, ya'ni $x(n)=u(n)$ bo'lganda tizim chiqish signali tizim xarakteristikasi $h(n)$ ga teng bo'lishini anglatishi bilan o'zini oqlaydi

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) u(n-k) =$$

$$h(0)n(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + \ldots = h(n), \quad n = 0,1,\ldots (3.32)$$

Bu $h(n)$ hisoblashning yana bir teng kuchli usulini beradi (amalda esa, z-almashtirishning yana bir usulini olamiz).

Nazorat savollari

1. Vaqt diskret tizimi deganda nimani tushunasiz?

2. Chiziqli va nochiziqli vaqt bo'yicha invariant tizimlar bir-biridan qanday farqlanadi?

3. To'g'ri va teskari z-almashtirish haqida umumiy tushuntirish bering.

4. Z-almashtirishda darajali qatorga yoyish usuli haqida tushuncha bering.

5. Z-almashtirishda elementar kasr sonlar qatoriga yoyish usuli haqida tushuncha bering.

6. Z-almashtirishda cheklash (ayirish) usulidan foydalanish haqida tushuncha bering.

7. Z-almashtirishning asosiy xossalarini ayting.

8. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ta'riflash deganda nimani tushunasiz?

9. Farqlanish tenglamalaridan diskret tizimlarda nima maqsadda foydalaniladi?

10. Farqlanish tenglamasini yozing va undagi ifodalarga ta'rif bering.

11. Impuls xarakteristikasi nimani anglatadi?

4. KORRELYATSIYA VA O'RAM

Korrelyatsiya tushunchasi signallarga ishlov berishda muhim o'rin tutadi. Bu matematik apparatdan quyidagi masalalarni yechishda foydalaniladi. Masalan, kompyuter orqali ko'rish yoki masofadan yer sun'iy yo'ldoshi orqali zondlashda turli tasvirlarni taqqoslashda, radar yoki gidroakustika qurilmalarida masofani o'lchash va signal nurlatish manbai joylashgan joyni aniqlashda (pelengatsiyada), ya'ni uzatiladigan va qabul qilingan signallarni taqqoslashda foydalanish mumkin.

Korrelyatsiya bir jarayonning ikkinchi bir jarayonga bog'liq emasligini yoki ularning bir-biriga o'xshashligini aniqlash imkoniyatini beradi. Korrelyatsiya, shuningdek o'ram olish jarayonining bir qismi hisoblanadi, bu ikki ma'lumotlar ketma-ketligining korrelyatsiyasini hisoblashda ulardan birining ketma-ketligini vaqt bo'yicha murjaat qilinadi. Bu korrelyatsiya va svertkani hisoblashda yagona algoritmdan foydalanish mumkinligini anglatadi.

4.1. Korrelyatsiya funksiyasi haqida umumiy tushunchalar

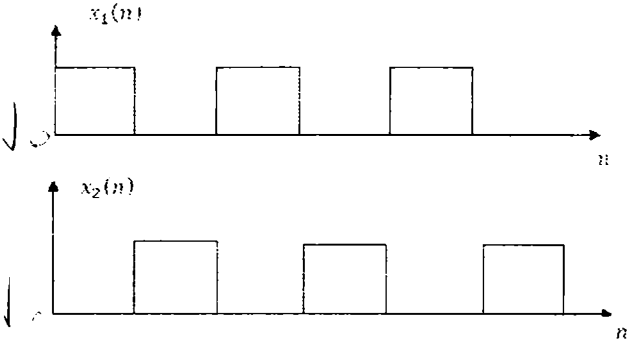
Agar ikki signal bir-biriga o'xshash bo'lib, bir nuqtadan boshqasiga o'tganda uning korrelyatsiyasi miqdorini ushbu ikki juft nuqtalardagi ko'paytmalar yig'indisi orqali hisoblash mumkin. Yuqorida keltirilgan fikr agar ikki bir-biriga bog'liq bo'lmagan, tasodifiy ma'lumotlar ketma-ketligini ko'rib chiqishda nisbatan asosli bo'ladi. Bu holda bir juft nuqtalar ko'paytmasining yig'indisi cheksiz kichik tasodifiy songa intiladi. Bu musbat va manfiy sonlar bir xil ehtimollik bilan paydo bo'lishi, natijada ko'paytmalarning juftliklari yig'indisi bir-birini qoplaydi (kompensatsiyalaydi), yo'qqa chiqaradi. Shu bilan birga yig'indi qiymati chekli, ya'ni nolga teng bo'lmasa, bu ular orasida korrelyatsiya borligini bildiradi. Manfiy korrelyatsiya (manfiy yig'indi) bir o'zgaruvchining kattalashishi ikkinchisining kichiklashishi bilan bog'liq. Shunday qilib, ikki ma'lumotlar N ta elementlar ketma-ketligi $x(n)$ va $x(n)$ larning o'zaro korrelyatsiyasi r ni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$r_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2(n).$$

O'zaro korrelyatsiyani bu usulda aniqlash natijasi olingan nuqtalar soniga bog'liq. Bu bog'liqlikni yo'qotish uchun r ni olingan nuqtalar soni N ga bo'linadi. Bu amalni ko'paytmalar yig'indisining o'rtacha qiymatini aniqlash deb qarash mumkin

$$r_{12} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2(n). \tag{4.1}$$

Ba'zi hollarda yuqorida keltirilgan usul bilan aniqlangan korrelyatsiya qiymati ikki ketma-ketlik haqiqatda bir-biriga 100% bo'lgan holda nolga teng bo'lishi mumkin. Bu ikki signal bir-biri bilan fazasi bilan farqlanganda, misol uchun sinus va kosinus funksiyalar orasidagi o'zaro korrelyatsiya, hisoblash natijasida nolga teng, ammo ular bir-biridan $\pi/2$ ga farqlanadi. Fazalari farqlanuvchi impulslar ketma-ketligi (4.1-rasm) korrelyatsiyasini hisoblash natijasi kechikish nolga teng bo'lganda nolga teng.

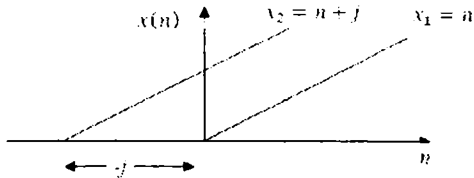


4.1-rasm. Fazasi farqlanuvchi 100% korrelyatsiyalangan signallar kechikish nolga teng bo'lganda korrelyatsiya nolga teng

4.1-rasmda keltirilgan har bir impulslar juftliklari uchun korrelyatsiya funksiyasi nolga teng, demak natijaviy korrelyatsiya funksiyasi ham nolga teng, chunki x va x lardan biri hamma vaqt nolga teng. Ammo signallar bir-biri bilan kuchli korrelyatsiyaga (bog'liqlikka) ega. Bu ikki signallardan birini: x ni qandaydir etalon signal, x ni esa tizim chiqishidagi kechikkan signal deb qarash mumkin. Korrelyatsiya funksiyasini aniqlash uchun ulardan birini vaqt bo'yicha surish (kechiktirish) kerak bo'ladi. Odatda, korrelyatsiyani hisoblash uchun x chap tomonga suriladi. Buni 4.2-rasmda ko'rsatilgandek, $x(n)$ ni $x(n+j)$ ga almashtirilgan deb tasavvur etish mumkin (bunda j – x ni kechiktirish qiymati yoki impulsni j ga teng sonli diskret vaqtga siljitish bilan teng kuchga ega). Umuman olganda x ni o'ng tomonga siljitish x ni o'ng tomonga siljitish bilan teng kuchli. Natijada o'zaro korrelyatsiyani aniqlash uchun quyidagi formulani olamiz:

$$r_{12}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+j) = r_{12}(-j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)x_1(n-j). \quad (4.2)$$

Amalda ikki signal orasida korrelyatsiya bo'lsa, ko'p hollarda ular orasidagi fazaviy bog'liqlik noma'lum bo'ladi, shuning uchun korelyatsiyani siljish (kechikish)ning bir necha qiymatlari uchun aniqlash va ulardan eng kattasini korrelyatsiya haqiqiy qiymati deb hisoblash kerak.



4.2-rasm. x signalga nisbatan j oraliq vaqtga siljitilgan $x = x + j$

Bundan tashqari korrelyatsiya funksiyasini uzluksiz vaqt davomiyligida ham aniqlash mumkin. Uzluksiz signallar korrelyatsiya funksiyasini aniqlashda analog signallar korrelyatorlari ushbu algoritm asosida ishlaydi. Vaqt uzluksiz bo‘lganda $n \to t$ ga va $j \to \tau$ ga almashtiriladi

$$r_{12}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \qquad (4.3)$$

Shu bilan birga, agar $x(t)$ va $x(t)$ lar takrorlanish davri T ga teng bo‘lsa, u holda (4.3) formula nisbatan soddalashadi

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \qquad (4.4)$$

Agar ma’lumotlar signali cheklangan energiyaga ega bo‘lsa, misol uchun davriy bo‘lmagan impulssimon signallar, u holda T vaqt bo‘yicha o‘rtacha qiymatni aniqlash $T \to \infty$ da bajarilmaydi, chunki bu holda $1/T$ nolga intiladi $(1/T \to 0)$ va $r(\tau)$ ham nolga intiluvchi kichik qiymatga ega bo‘ladi. Bu holda quyidagi formuladan foydalaniladi:

$$r_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}(t)x_2(t+\tau)\,. \qquad (4.5)$$

Amaliyotda cheklangan davomiylikka ega bo‘lgan signallarga ishlov beriladi, shuning uchun (4.2) yoki (4.6) formulalardan foydalaniladi

$$r_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x_1(t)x_2(t+\tau)dt. \qquad (4.6)$$

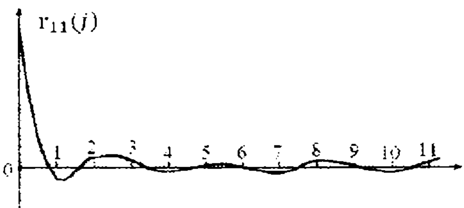
$x(n) = x(n)$ bo‘lgan xususiy hol, signalning o‘zini o‘zi bilan korrelyatsiyasini aniqlaymiz. Bu jarayon avtokorrelyatsiya funksiyasini aniqlash jarayoni deb ataladi. Signal avtokorrelyatsiya funksiyasi quyidagicha aniqlanadi

$$r_{11}(j) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_1(n+j).$$

Avtokorrelyatsiya funksiyasi bitta juda foydali xossaga ega, ya’ni

$$r_{11}(0) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1^2(n) = S.$$

bunda S – signal normallashtirilgan energiyasi. Natijada signal energiyasini aniqlash usulini olamiz. Agar signal tizimga oq shovqin – Gauss shovqini ko'rinishida ta'sir etsa, uning avtokorrelyatsiya funksiyasi $\tau = 0$ bo'lganda o'zining eng katta qiymatiga ega bo'ladi va $j \neq 0$ bo'lishi bilan uning avtokorrelyatsiya funksiyasi $j = 0$ dagi qiymatidan tasodifiy o'zgaruvchan kichik qiymatgacha kichiklashadi (4.3-rasm).



4.3-rasm. Tasodifiy signal avtokorrelyatsiya funksiyasi

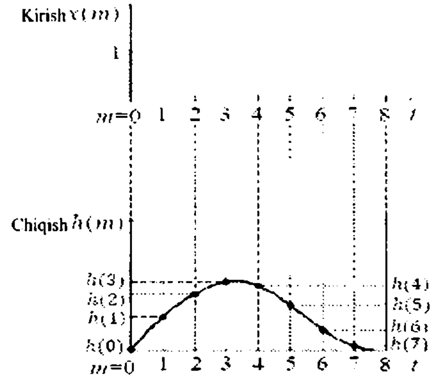
4.2. O'ramning ta'rifi

O'ram tizim chiqish signali uning kirish signali bilan o'zaro ta'sirlanishi orqali aniqlanishini ifodalaydi. Odatda, tizim chiqish signali kirish signalining kechikkan, susaygan (amplitudasi kichiklashgan) yoki kuchaytirilgan ko'rinishda bo'ladi. Tizim chiqishida impuls kirish signali ta'siri natijasida hosil bo'lgan signal vaqt bo'yicha o'zgaruvchan bo'lib, ma'lum bir vaqtda o'zining maksimal qiymatiga ega bo'ladi (4.4-rasm).

4.4-rasmdan ko'rinadiki, unga $n = 0$ vaqtda ta'sir etgan birlik impuls ta'sirida chiqishidagi signaldan olingan oniy qiymatlar $h(m)$ ga teng bo'ladi. Bu kattalik tizimning impuls xarakteristikasi yoki uning impulsga aks ta'siri deb ataladi.

Tizim kirishiga m vaqtlarda $x(m)$ impulslar ketma-ketligini berilishidagi jarayonlarni ko'rib chiqamiz. Chiqish signali vaqt nolga teng bo'lganda $y(0)$ ga teng bo'ladi, shu bilan birga

$$y(0) = h(0)x(0).$$



4.4-rasm. Kirish impulsi va tizimning unga mos impuls xarakteristikasi

Diskret vaqt $m=1$ bo'lganda chiqish signali musbat $h(1)x(0)$ ga teng (kirishda $x(1)$ bo'lganda chiqishda $h(0)x(1)$, bu $m=0$ da berilgan signalning kechikkan ta'siri), natijada

$$y(1) = h(1)x(0) + h(0)x(1).$$

Shunday qilib, kelgusi chiqish signallari quyidagicha yoziladi:

$$y(2) = h(2)x(0) + h(1)x(1) + h(0)x(2),$$
$$y(3) = h(3)x(0) + h(2)x(1) + h(1)x(2) + h(0)x(3),$$

$$y(n) = h(n)x(0) + h(n-1)x(1) + \cdots + h(0)x(n). \qquad (4.7)$$

~~Agar tizim chiziqli bo'lsa chiqish signalini avvalgi kirish signallari~~ ta'sirining chiziqli yig'indisi orqali aniqlash mumkin. Birinchi tartibli chiziqli tizim chiqish signali (4.7) tenglama orqali ifodalanadi.

Keltirilgan ifodalarni o'rganish natijasida chiqish signali kirish signali ketma-ketligini tizim impuls xarakteristikasining vaqt bo'yicha murojaati nuqtalaridagi qiymatiga ko'paytirish orqali olinishi haqidagi hulosaga kelamiz. (4.7) tenglikni quyidagi ko'rinishda ham ifodalash mumkin:

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n)x(0). \qquad (4.8)$$

Demak, chiqish signalini tizim impuls xarakteristikasi juft nuqtalaridagi qiymatlarining kirish signali ketma-ketligining vaqt bo'yicha murojaat qiladigan qiymatlari ko'paytmasi shaklida aniqlash mumkin.

Demak, o'ram yig'indisi bir ketma-ketlik va vaqt bo'yicha murojaat qiladigan boshqa ketma-ketliklar orasida o'zaro korrelyatsiya funksiyasiga mos keladi.

(4.7) va (4.8) tenglamalarni quyidagi ixcham ko'rinishda ham ifodalash mumkin:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m)x(m), \tag{4.9}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m). \tag{4.10}$$

Ushbu funksiya kirish signallarining impuls xarakteristikasi bilan o'rami yig'indisi deb ataladi va chiqish signali kirish signalining tizim impuls xarakteristikasi bilan o'rami orqali aniqlanadi.

(4.9) va (4.10) tenglamalarni cheksiz davomiyli signallar uchun ham qo'llashda uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) \circledast h(n), \tag{4.11}$$

va

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) \circledast x(n). \tag{4.12}$$

Keltirilgan tenglamalarda " $\circledast$" belgisi o'ram amalani anglatadi.

Agar kirish signali uzluksiz impulslar ketma-ketligidan iborat bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan tenglamalardagi yig'ish amalini integrallash amali bilan amlashtirish mumkin. Bu holda (4.11) tenglamani quyidagi shaklga keltirish mumkin:

$$y(t) \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda\,. \tag{4.13}$$

(4.13) – o'ram integrali deb ataladi.

O'ram deganda uni biz tor ma'noda tizim impuls xarakteristikasining kirish signali bilan o'ramini tushunamiz. Umuman olganda o'ram tushunchasini har qanday ikki ma'lumotlar to'plamiga qo'llash va bu atamani nisbatan keng ma'noda qo'llash mumkin.

(4.11)-(4.13) tenglamalardan ko'rinadiki o'ramni olish amali vaqt funksiyasi – vaqt bo'yicha o'ram olishni anglatadi. Ma'lumki, chastotalar orqali tizimning f chastotasidagi chiqish signali $Y(f)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$Y(f) = H(f)X(f). \tag{4.14}$$

bunda $H(f)$ – tizimning f chastotadagi chastota xarakteristikasi, $X(f)$ – kirish signali $x(t)$ ning Fure ko'rinishi. Bundan tashqari $H(f)$ tizim chastota xarakteristikasi $h(t)$ ning Fure ko'rinishi ekanligini ham tasdiqlash mumkin. (4.14) tenglamaning har ikki qismiga Fure teskari almashtirishini qo'llab quyidagini olamiz:

$$F^{-1}[Y(f)] = y(t) = F^{-1}[H(f)X(f)]\,. \quad (4.15)$$

(4.13) va (4.15) tenglamalarni birgalikda tahlil etib (4.16) tenglamani olamiz

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda = x(t) \odot h(t) = F^{-1}[H(f)X(f)], \quad (4.16)$$

Shunday qilib, ikki signalning vaqt bo'yicha o'rami (svertkasi) ushbu signal Fure ko'rinishlariga Fure teskari almashtirishini qo'llashga mos keladi. Ushbu xulosani qisqacha "vaqt bo'yicha o'ram olish chastota bo'yicha ko'paytirishga teng (mos) keladi" deyiladi.

Keltirilgan ta'sirning yana bir unga mos ikkinchisi ham bor, ya'ni chastota bo'yicha o'ram vaqt bo'yicha ko'paytirishga teng (mos) keladi. Shunday qilib quyidagi ifodani olamiz:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-u)H(u)du = X(f) \odot H(f) = F[x(t)h(t)]. \quad (4.17)$$

Shunday qilib, ikki vaqt ketma-ketliklari Fure ko'rinishi ko'paytmasi ikki ketma-ketlik Fure ko'rinishi o'ramiga mos keladi.

4.3. O'ramning xossalari

1. Kommutativlik qonuni

$$x_1(t) \odot x_2(t) = x_2(t) \odot x_1(t). \quad (4.18)$$

Shuni ta'kidlaymizki (4.18) ifoda quyidagi ifoda bilan teng kuchga ega

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)x_1(t-\tau)d\tau.$$

2. Distributivlik qonuni

$$x_1(t) \odot [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) \odot x_2(t) + x_1(t) \odot x_3(t). \quad (4.19)$$

3. Assotsiativlik qonuni

$$x_1(t) \odot [x_2(t) \odot x_3(t)] = [x_1(t) \odot x_2(t)] \odot x_3(t). \quad (4.20)$$

4.4. Tizimlarni identifikatsiyalash

(4.12) tenglamada tizim kirish signali $x(n)$ va chiqish signali $y(n)$ orasidagi bog'liqlik keltirilgan. Identifikatsiya atamasi tizimning impuls xarakteristikasi $h(n)$ ni aniqlashni anglatadi. Tizim kirishiga $x(n)$ sinov signalini berib, chiqish signali $y(n)$ va impuls xarakteristika $h(n)$ ni quyidagi ketma-ketlikda aniqlash mumkin: (4.8) tenglamadan chiqish signalini aniqlaymiz

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n)x(0).$$

$n = 0$ bo'lganda $y(0) = h(0)x(0)$ bo'ladi, shuning uchun

$$h(0) = \frac{y(0)}{x(0)}. \quad (4.21)$$

Endi (4.10) tenglamadan foydalanib, quyidagini olamiz

$$y(n) = h(n)x(0) + \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m), \; n \geq 1. \quad (4.22)$$

bundan

$$h(n) = \frac{y(n) - \sum_{m=0}^{n-1} h(m)x(n-m)}{x(0)}, \; n \geq 1, \; x(0) \neq 0. \quad (4.23)$$

4.5. O'ramning murojaati

Agar tizim impuls xarakteristikasi va chiqish signali ma'lum bo'lsa, noma'lum kirish signalini izlash (qidirish) uchun o'ram murojaatidan foydalaniladi. O'ramni murojaatga aylantirishni tizimni identifikatsiyalashda foydalaniladigan jarayondan foydalanib boshqarish mumkin. (4.14) tenglamadan foydalanib quyidagini olamiz:

$$y(n) = h(0)x(n) + \sum_{m=1}^{n} h(m)x(n-m). \quad (4.24)$$

Agar $n = 0$ bo'lsa $y(0) = h(0)x(0)$, shuning uchun

$$x(0) = \frac{y(0)}{h(0)}. \quad (4.25)$$

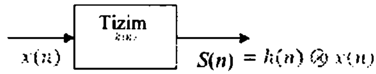
(4.24) tenglamadan $x(0)$ – kirish signalini aniqlash uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$x(0) = \frac{y(n) - \sum_{m=1}^{n} h(m)x(n-m)}{h(0)}. \quad (4.26)$$

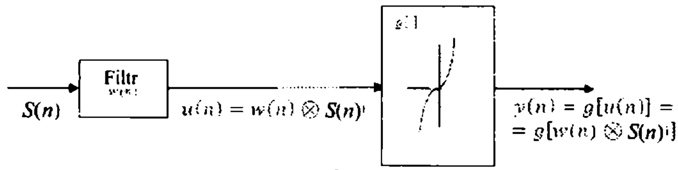
4.6. O'ramning "ko'rona" murojaati

Tizim impuls xarakteristikasi noma'lum bo'lganda kirish signalini chiqish signali orqali aniqlash jarayonini o'ram ko'rona murojaati deb ataladi. Quyida keltiriladigan usulda kirish signalini aniqlash Bell va Sejnovski ishlanmalariga asoslangan.

Ushbu usul yordamida masalani yechish jarayoni 4.6-rasmda tasvirlangan.



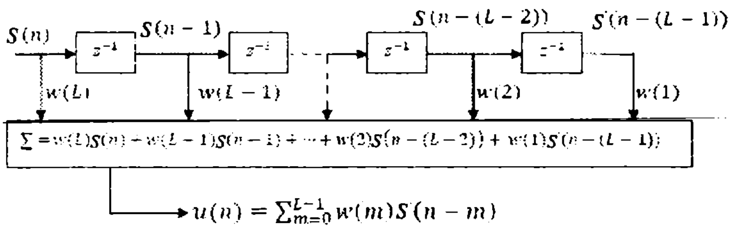
a



b

4.6-rasm. O‘ramning ko‘rona murojaati

4.6*a*-rasmda aniqlanishi kerak bo‘lgan $x(n)$ birlamchi signal impuls xarakteristikasi $h(n)$ bo‘lgan tizim orqali uzatilishi natijasida o‘lchangan chiqish signali $S(n)$ olinadi. $S(n)$ signal $h(n)$ ni $x(n)$ bilan o‘rami $(h(n) \otimes x(n))$ ni ifodalaydi, natijada u $x(n)$ ning kechikkan nusxasi ta’sirida qisman buzilgan bo‘ladi. Masalada $x(n)$ ga yaxshi darajada mos (o‘xshash) signal $u(n)$ ni hisoblash talab etiladi. Demak 4.6*b*-rasmda tasvirlanganidek $S(n)$ kirish signalini o‘rash natijasida kerakli $u(n)$ chiqish signalini beruvchi $w(n)$ filtrini topish talab etiladi. Bunday filtr sifatida 4.7-rasmda tasvirlangan transversal filtrdan foydalanish mumkin.



4.7-rasm. Ko‘rona o‘ram uchun $w(n)$ transversal filtr

Bu filtr chiqish signali quyidagiga teng

$$u(n) = \sum_{m=0}^{L-1} w(m)\, S(n-m).$$

bo‘lib, uni vazifasini bajarish qobiliyatiga ega bo‘lgan ifodani quyidagi matrisa ko‘rinishida ifodalaymiz

$$U = WF,$$

bunda $$\mathbf{U} = \{u(0), u(1), \dots, u(N)\}^T.$$

$$\mathbf{W} = \begin{Bmatrix} w(L) & 0 & 0 & 0 \\ w(L-1) & w(L) & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ w(1) & w(2) & w(L) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & w(1) & w(L) \end{Bmatrix}.$$

$F = \{S(0), S(1), \dots, S(N)\}$, N – vaqt qatoridagi elementlar soni.

Masalani yechish uchun miqdor koeffisientlarni adaptiv hisoblash algoritmidan foydalanib axborotni maksimallashtirish prinsipidan foydalanish mumkin. Natijada $u(n)$ nuqtalari orasidagi qiymatlari orasidagi statistik bog'liqlikni kamaytirish orqali sozlash amalini bajarish kerak bo'ladi. Bunday yondashish $u(n)$ ni oqartirish usuli sifatida ma'lum, chunki oq shovqin ketma-ketligida olingan oniy qiymatlari statistik bog'liq emas. Bu natijaga erishish uchun yuqori tartibli statistik bog'liqliklarni bartaraf qilish kerak. Buning uchun $u(n)$ tizimga $g[u(n)]$ nochiziqli uzatish funksiyasi orqali boriladi va uning chiqishidagi $y(n) = g[u(n)]$ axborot maksimallashtiriladi. Koeffisientlarni yangilash quyidagi formulalar orqali amalga oshiriladi:

$$\Delta w(L-j) \propto \sum_{n=j}^{N} \left(\frac{1}{w(L)} - 2x(n)y(n)\right) \tag{4.27}$$

$$\Delta w(L-j) \propto \sum_{n=j}^{N} \left(-2x(n-1)y(n)\right). \tag{4.28}$$

Hisoblash algoritmi $\Delta w(L)$ va $\Delta w(L-j)$ lar kichik bo'lgungacha davom ettiriladi. So'ngra topilgan kechikish va ma'lumotlarning ishlov berish uchun topilgan miqdor koeffisientlaridan foydalanib, tegishli filtr amalga oshiriladi.

Nazorat savollari

1. *Avtokorrelyatsiya va o'zaro korrelyatsiya tushunchalari nimani anglatadi?*
2. *O'ram tushunchasidan qanday hollarda foydalaniladi va uning qanday asosiy xossalari bor?*
3. *Tizim impuls xarakteristikasiga ta'rif bering.*
4. *Identifikatsiya tushunchasi nimani anglatadi?*
5. *Transversal filtr deb qanday filtrlarga aytiladi?*
6. *Transversal filtr umumlashgan strukturaviy sxemasini chizing va ishlash prinsipini aytib bering.*

5. RAQAMLI FILTRLARNI LOYIHALASH

Raqamli filtr atamasi orqali kirish signali raqamli signal bo'lgan va chiqish signali boshqa raqamli signalni olishni ta'minlovchi matematik algoritmni apparat yoki dasturiy ta'minot orqali amalga oshiruvchi qurilma tushuniladi. Bunda raqamli filtrning amplituda va faza xarakteristikasi maxsus shaklantirilgan bo'ladi. Ko'p hollarda raqamli filtrlardan foydalanish afzalliklarga ega, ular amplituda va faza xarakteristikalari qiymatlarini nisbatan aniq ta'minlash imkoniyatini beradi.

Norekursiv filtrlarda navbatdagi chiqish signali oniy qiymati $y(n)$ ni hisoblashda ikki tur ma'lumotlardan: kirish signalining bir necha oniy qiymatlaridan va chiqish signalining bir necha odim avvalgi oniy qiymatlaridan foydalaniladi. Bunday filtrlardan foydalanib hisoblashlarda kirish signalining eng kamida bitta qiymati qatnashishi kerak, aks holda chiqish signali kirish signaliga bog'liq bo'lmaydi. Buning aksiga hisoblashlarda chiqish signalining avvalgi oniy qiymatlaridan foydalanilmasa ham bo'ladi. Bu holda filtrlash tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y(n) = \sum a x(n-i).$$

Bunday filtrlar uchun foydalaniladigan oniy qiymatlar soni m uning tartibini baholaydi. Ushbu ifodadagi algoritmni amalga oshiruvchi strukturaviy sxema 5.7-rasmda keltirilgan.

Kirish signalining dastlabki bir necha oniy qiymatlari raqamli kechiktirish liniyasi xotirasi yacheykasida saqlanadi. Kirish signalining bu oniy qiymatlari a koeffisientlariga ko'paytiriladi va qo'shish (yig'ish) amali bajarilishi natijasida chiqish signali oniy qiymati $y(n)$ ni shakllantiradi.

Bu tur filtrlarda chiqish signalini aniqlashda chiqish signalining avvalgi oniy qiymatlaridan foydalanilmaydi, uning strukturaviy sxemasida teskari bog'lanish zanjiri bo'lmaydi. Shuning uchun bunday filtrlarni norekursiv filtrlar deb ataladi. Ba'zan esa bu tur filtrlarni transversal filtrlar (inglizcha transversal – ko'ndalang so'zidan olingan) deb ataladi.

Norekursiv filtrning impuls xarakteristikasi $h(n)$ ni juda oson aniqlash mumkin. (5.1) tenglamaga yakka impuls $x(n)$ ni kirish signali sifatida qo'yib quyidagi tenglamani olamiz:

$$h(n) = \sum a x(n-i).$$

Bunda $x(n-i)$ n ning $n = i$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun nolga teng bo'lib, $n = i$ bo'lganda birga teng. Shuning uchun norekursiv filtrning impuls xarakteristikasi $h(n) = a$ bo'ladi, ya'ni a koeffisientlar filtrga ta'sir qiluvchi kirish signali oniy qiymatiga aks ta'siriga – impuls xarakteristikasiga mos keladi.

buni 5.7-rasm orqali tushuntirish mumkin. Filtr kirishiga yakka impuls shaklidagi signal berilganda u kechiktirish liniyasi orqali o'tishi jarayonida $a\ ,a\ ,a\ ,\ldots a$ koeffisientlariga ko'paytiriladi va uning chiqishida $y(n)$ signali hosil bo'ladi. Ushbu filtrdagi kechiktirish liniyalari soni chekli bo'lgani, norekursiv filtr chiqishidagi impuls xarakteristikasi davomiyligi cheklangan bo'ladi. Shuning uchun bunday filtrlarni impuls xarakteristikasi chekli deb ham ataladi. Kelgusida norekursiv filtr atamasi bilan birga impuls xarakteristikasi chekli filtr atamasidan ham keng foydalanamiz.

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarda teskari bog'lanish zanjiri bo'lmaganligi uchun har qanday boshlang'ich sharoit bo'lganda ham bunday filtrlar o'z-o'zidan qo'zg'almaydi (barqaror bo'ladi), chunki kirish signali $x(n)=0$ bo'lganda, chiqish signali ham kechiktirish liniyasini kelgusi kirish signali oniy qiymati ta'sir etishiga tayyorlash uchun kerakli m taktgacha davomiylikda mavjud bo'lishi mumkin.

Impuls xarakteristikasi chekli – norekursiv filtrlardan ularni tahlil qilish, sintezlash va amalga oshirish, asbolyut barqarorligi uchun amaliyotda keng foydalaniladi. Ammo amplituda-chastota xarakteristikasi yuqori darajada П-simon shaklda bo'lishini ta'minlash uchun yuqori tartibli – bir necha yuz, ba'zan esa ming bo'lgan filtrlardan foydalanish kerak bo'ladi.

Rekursiv filtrlar. Agar filtrlash tenglamasi umumiy ko'rinishda (3.27) bo'la, u holda bunday filtrlashda kirish va chiqish signali oniy qiymatlaridan foydalaniladi. Bunday filtrlarda chiqish signali oniy qiymatlar $y(n-i)$ ni xotirada saqlash uchun ikkinchi kechiktirish liniyalari zanjirini sxemaga qo'shish kerak bo'ladi. Bu tur filtrning strukturaviy sxemasi 5.4-rasmda keltirilgan. Bu tur filtrlarda hisoblashlarda chiqish signali oniy qiymatlarining avvalgi m tasidan foydalanish kerak bo'lgani uchun albatta teskari bog'lanish zanjiri bo'lishi shart. Shuning uchun bunday filtrlarni rekursiv filtrlar deb ataladi. Bu tur filtrlarda foydalaniladigan kirish va chiqish signallari oniy qiymatlari soni bir-biriga teng bo'lmasligi mumkin. Bu holda filtrning tartibi n va m lardan qaysi biri katta bo'lsa, shu tartib orqali baholanadi. Misol uchun $m>n$ bo'lsa, m-chi tartibli rekursiv filtr deb ataladi.

Rekursiv filtrning impuls xarakteristikasi hisoblash norekursiv filtrning impuls xarakteristikasini hisoblashga qaraganda sezilarli darajada murakkabroq. Impuls xarakteristikasining dastlabki bir nechasining shakllanishini ko'rib chiqamiz. Filtr kirishiga birinchi kirish signali oniy qiymati ta'sir etganda, u a ga ko'paytiriladi va filtr chiqishidagi $h(0)$ a paydo bo'ladi. So'ngra kirish yakka impulsi kirish kechiktirish liniyasiga kelib tushadi va chiqish signali oniy qiymati a chiqish kechiktirish liniyasiga ta'sir etadi. Natijada, filtr chiqishidagi impuls xarakteristikasi ikkinchi oniy qiymati shakllanadi, ya'ni

$$h(1)=a\ +b\,h(0)=a\ +a\,b\ .$$

Shu tartibda kirish signali yakka sakrash impulsini kirish kechikish liniyasi orqali so'rilishi va chiqish kechiktirish liniyasi signali oniy qiymati qo'shilishi e'tiborga olib quyidagi natijani olamiz:

$$h(2) = a + b\,h(0) + b\,h(1) = a + a\,b + b\,(a + a\,b) = a + ab + a\,b + a\,b\ .$$

Yuqorida olingan ifodadan ko'rinadiki chiqish kechiktirish liniyasi impuls xarakteristikasi oniy qiymatlari bilan to'lib borgani sari filtrni hisoblash matematik formulalari ham murakkablashib boradi.

Rekursiv filtrlarda teskari bog'lanish kechiktirish liniyalari zanjirlari mavjudligi cheksiz davomiylikka ega bo'lgan impuls xarakteristikasini olish imkoniyatini beradi. Shuning uchun rekursiv filtrlarni impuls xarakteristikasi cheksiz bo'lgan filtrlar deb ham ataladi. Kelgusida rekursiv filtrlar atamasi bilan bir ma'noda bo'lgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar atamalaridan foydalaniladi.

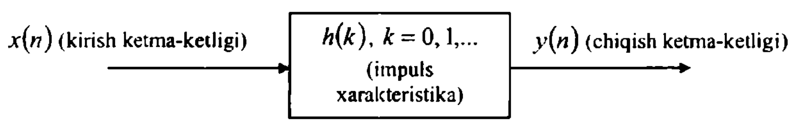
Rekursiv filtrlarda teskari bog'lanish kechiktirish liniyalari zanjiri mavjudligi va bu tur filtrlarning impuls xarakteristikalari davomiyligi yaeksiz (nisbatan uzoq) davomiylikka ega bo'lgani uchun o'z-o'zidan qo'zg'alish hodisasi yuz berishi, ya'ni generatsiyalash ish holatiga o'tishi mumkin.

5.1. Raqamli filtrlarning turlari: impuls xarakteristikalari chekli va impuls xarakteristikalari cheksiz filtrlar

Raqamli filtrlar ikki katta turga bo'linadi:

- cheksiz impuls xarakteristikali filtrlar;
- chekli impuls xarakteristikali filtrlar.

Har ikki tur filtrlarni (standart ko'rinishda) ularning impuls xarakteristikalari koeffisienti $h(k)$ $(k = 0, 1, ...)$ orqali 5.1-rasmda keltirilgandek tasvirlash mumkin.



5.1-rasm. Raqamli filtrni konseptual tasvirlash

Filtr kirish va chiqish signallari o'ram amali orqali bir-biriga bog'langan. Ushbu bog'liqlik (5.1) formula orqali impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uchun va (5.2) formula orqali impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun keltirilgan.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \tag{5.1}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \tag{5.2}$$

Ushbu (5.1) va (5.2) tenglamalardan shuni xulosa qilish mumkinki, impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning impuls xarakteristikalari cheksiz davomiylikka ega va impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun impuls xarakteristikasi davomiyligi cheklangan, chunki impuls xarakteristikasi cheklangan filtr impuls xarakteristikasi $h(k)$ faqat N ta qiymatni qabul qiladi. Amalda impuls xarakteristikasi cheksiz filtr chiqish signalini (5.1) tenglamadan foydalanib hisoblash mumkin emas, chunki aks ta'sir impuls xarakteristikasi juda katta miqdorda davomli (nazariy nuqtai nazardan cheksiz katta). Shuning uchun impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uchun (5.1) tenglamani rekursiv shaklda quyidagicha ifodalaymiz:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k). \quad (5.3)$$

bunda a va b – filtr koeffisientlari. Shunday qilib (5.2) va (5.3) tenglamalar impuls xarakteristikasi cheklangan va impuls xarakteristikasi cheklanmagan filtrlarning farqli tenglamalari hisoblanadi. Ushbu tenglamalardan raqamli filtrlarni loyihalash bilan bog'liq masalalarni yechishda keng foydalaniladi.

(5.3) tenglamada tizim chiqish signalining real vaqtdagi oniy qiymatlari $y(n)$ undan oldingi chiqish funksiyalari bo'lib, hozir uning kirishiga ta'sir etayotgan va bundan avvalgi ta'sir etgan kirish signallari oniy qiymatlarining ham funksiyasi hisoblanadi. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtr – bu teskari bog'lanishli tizim. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning chiqish signali oniy qiymatlari $y(n)$ avval ta'sir etgan va hozirda ta'sir etayotgan kirish signali qiymatiga bog'liq. Agar (5.3) tenglamaning hamma b koeffisientlarini nolga teng qilib olinsa, u holda (5.2) tenglama kelib chiqadi.

(5.4) tenglamalarda impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlar ularning uzatish funksiyalari orqali ifodalangan bo'lib, bunday ko'rinishda talqin etish ularning chastota xarakteristikalarini baholashda qulayliklar keltirib chiqaradi:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}. \quad (5.4a)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} / (1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}). \quad (5.4б)$$

Raqamli filtrlarni loyihalashda (5.4a) yoki (5.4b) tenglamalardan foydalanish loyihalanayotgan filtrning qaysi tur filtr guruhiga - impuls xarkteristikasi chekli yoki cheksiz turiga tegishliligiga bog'liq. Shuning uchun raqamli filtrlarni bir-biridan farqini bilish ularning o'ziga xos xarakteristikalarini va eng kerakligi qaysi tur filtrni tanlashni bilish kerak.

5.2. Impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlarni tanlash

Impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlardan birini tanlash ularning o'ziga xos afzalliklariga bog'liq.

1. Impuls xarakteristikasi chekli raqamli filtrlar yuqori darajada chiziqli fazaviy xarakteristikaga ega. Shuning uchun u signal spektral tashkil etuvchilari fazalari orasidagi munosabatlarning buzilishiga yo'l qo'ymaydi, natijada signal shakli buzilmaydi. Bu ko'p hollarda muhim hisoblanadi, misol uchun, ma'lumotlarni uzatishda, biomedisinada, audio va video signallarga ishlov berishda va h.k. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning fazaviy xarakteristikalari nochiziqli, ayniqsa signal o'tkazish polosasi chekkalarida.

2. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar norekursiv amalga oshirilgan, ya'ni ular hamma vaqt barqaror (bu 5.2-formula tahlilidan kelib chiqadi). Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning barqarorligiga hamma vaqt ham kafolat berib bo'lmaydi.

3. Filtrlarni amalda qo'llash uchun cheklangan bitlar sonidan foydalaniladi. Buning amaliy ta'siri impuls xarakteristikasi chekli filtrlarga qaraganda impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarga nisbatan kam (misol uchun, butunlash shovqini va kvantlash xatoligi).

4. Cheklangan davomiyli impuls xarakteristikani olishda chastota xarakteristikasining qiyaligi katta bo'lishi uchun impuls xarakteristikasi cheklanmagan filtrnikiga qaraganda ko'p koeffisientlar kerak bo'ladi. Natijada impuls xarakteristikasi cheklangan AChX berilgan filtrni amalga oshirish uchun impuls xarakteristikasi cheksizga nisbatan katta hisoblash quvvati va xotira kerak bo'ladi.

5. Analog filtrlarni ularga ekvivalent bo'lgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtrga almashtirish nisbatan oson. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun bunday almashtirish mumkin emas, chunki unga o'xshash analog filtr turlari yo'q. Ammo impuls xarakteristikasi chekli filtrlar yordamida istalgan AChXli filtrni yaratish oson.

6. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni sintezlash agar kompyuterdan foydalanilmasa algebraik jihatdan murakkabroq.

7. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar rekurent. Bu u orqali "vaqt bo'yicha teskari"siga o'zgaruvchi yagona signalni berganda, umuman olganda, biz boshqa natijalarni olamiz. Agar bu vaqt bo'yicha anizatropiya nutq signali uchun tabiiy bo'lgani bilan, tasvir signallari uchun qo'llash mumkin emas. Shuning uchun impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlardan foydalanish uchun bir qator cheklanishlar mavjud.

Yuqorida keltirilgan xulosalar asosida impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarni tanlashda quyidagilarga e'tibor berish kerak:

- agar filtr AChX signal o'tkazish polosasida bir xil uzatish koeffisientiga va signal o'tkazish imkoniyati katta bo'lishi yagona talab bo'lsa impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlardan foydalanish kerak, chunki impuls xarakteristikasi cheklanmagan (ayniqsa elleptik xarakteristikasidan foydalaniladigan) filtrlar impuls xarakteristikasi chekli filtrlarga qaraganda kam sonli koeffisientlarni aniqlashni talab etadi;

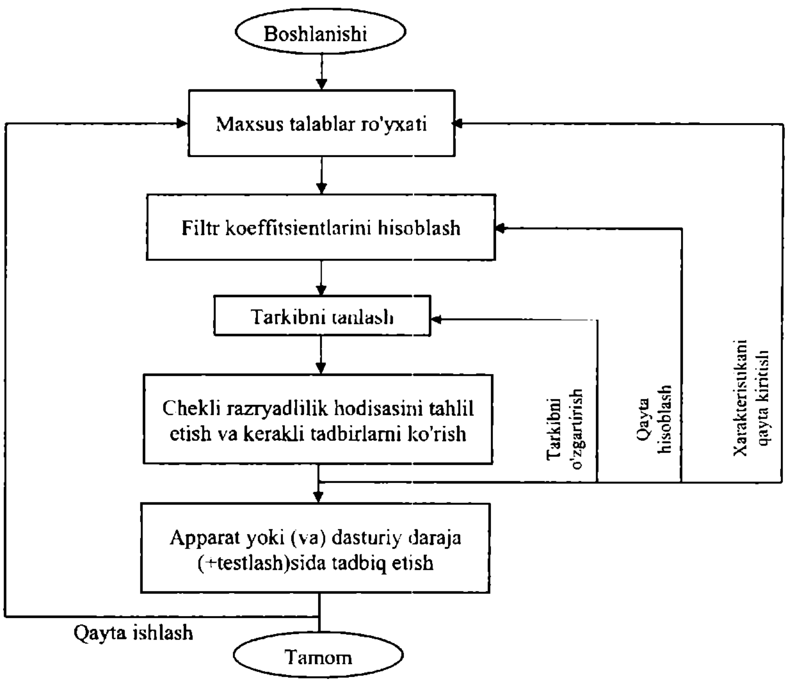
- impuls xarakteristikasi chekli filtrlardan, agar filtrlar koeffisientlari uncha katta bo'lmagan, xususan agar faza xarakteristikasida buzilishlari bo'lmasligi yoki kichik bo'lganda foydalanish tavsiya etiladi. Bundan tashqari so'nggi yillarda yaratilgan signallarga raqamli ishlov berish protsessorlari impuls xarakteristikasi chekli filtrlar arxitekturasi (tuzilishi)ga asoslangan bo'lib, ulardan ba'zilari maxsus impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun ishlab chiqilgan.

5.3. Filtrlarni loyihalash bosqichlari

Raqamli filtrlarni loyihalash besh bosqichda o'tadi (5.2-rasm).

1. Filtrga qo'yiladigan asosiy texnik talablar.
2. Filtrning mos keluvchi koeffisientlarini hisoblash.
3. Filtrning tegishli strukturasini tasavvur etish.
4. Filtrning ishlash sifatiga razryadlar soni cheklanganligini tahlil etish.
5. Filtrni dasturiy yoki (va) apparat darajasida amalga oshirish.

Yuqorida keltirilgan besh bosqich ba'zan bir-biriga bog'liq bo'ladi: bundan tashqari ular hamma vaqt ham keltirilgan tartibda joylashgan bo'ladi. Amalda ikkinchi bosqichni uchinchi va to'rtinchi bosqichlar bilan birga qurish imkoniyatini beradigan usullar ham bor.



5.2-rasm. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni loyihalash bosqichlari

Ammo samarador filtrni olish uchun ushbu jarayonni bir necha "iteratsiya" – yaqinlashtirishlardan foydalanib amalga oshirishga to'g'ri keladi, ayniqsa filtrga bo'lgan maxsus talablar to'liq ma'lum bo'lmagan hollarda yoki ishlab chiqaruvchi boshqa teng kuchli SRIB filtrini tahlil etmoqchi bo'lgan hollarda yuz beradi.

5.3.1. Maxsus talablar ro'yxati

Maxsus talablar ro'yxati quyidagilardan iborat:

1) signal xarakteristikalari (signal va uni oluvchi turi, signalni kiritish-chiqarish interfeysi, ma'lumotlarni uzatish tezligi va polosa kengligi, eng yuqori chastota);

2) filtr xarakteristikalari (talab etiladigan AChX va FChX va ushbu xarakteristikalarga talablarning qanchalik qat'iyligi, ishlash tezligi va filtr ish rejimi (real yoki kechiktirilgan (model) vaqt));

3) amalga oshirish prinsipi (misol uchun, kompyuter uchun yuqori darajali dasturlash tilida yoki protsessorga asoslangan SRIB tizimi, shu bilan birga signal protsessorini tanlash ham amalga oshiriladi);

4) filtr tarkibi (strukturasi)ga qo'yiladigan boshqa talablar (misol uchun, filtr tannarxi). Loyihalovchi va ishlab chiqaruvchi boshlang'ich bosqichlarida to'liq axborot (ma'lumot)larga ega bo'lmasligi mumkin. Ammo loyihalash va ishlab chiqarish jarayonini soddalashtirish uchun iloji boricha ko'p sonli talablar ma'lum bo'lgani ma'qul.

Filtrlar xarakteristikalari ko'p hollarda chastotalarga bog'langan ko'rinishda beriladi. Chastota tanlovchan filtrlar; past chastota filtrlari; chastota polosasi filtri uchun odatda maxsus talablar ruxsat etiladigan farqlanishlar chizmasi orqali ifodalanadi. Past chastota filtri uchun shunday chizma 5.3-rasmda keltirilgan.

Shtrixlangan gorizontal chiziqlar ruxsat farqlanishlar chegarasini belgilaydi. Asosiy o'tkazish polosasida amplituda-chastota xarakteristikasining eng katta farqlanishi δ , ~~o'tkazmaslik polosasida eng katta farqlanish~~ δ .

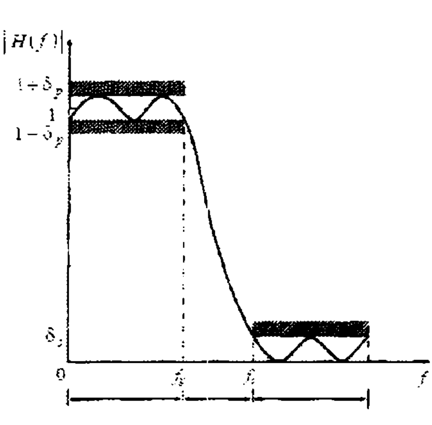
Qo'shimcha o'tish polosasi kengligi filtr xarakteristikasi qanday darajada tikligini bildiradi. AChX uzatish koeffisienti $H(f)$ bu qismida asta-sekin, to o'tkazmaslik polosasiga qadar kamayib boradi. Amalda quyidagi asosiy ko'rsatkichlar asosiy qiziqish bildiradi:

δ – o'tkazish polosasidagi filtr uzatish koeffisienti $H(f)$ ning farqlanishi (o'zgarishi);

δ – o'tkazmaslik polosasidagi filtr uzatish koeffisienti $H(f)$ ning farqlanishi (o'zgarishi);

f – o'tkazish polosasi chegaraviy chastotasi;

f – o'tkazmaslik polosasi chegaraviy chastotasi.



5.3-rasm. Past chastotalar filtri uchun ruxsat etiladigan farqlanishlar chizmasi

Chegaraviy chastotalar normallashtirilgan ko‘rinishda beriladi, ya’ni diskretlash chastotasi f/F ulushi ko‘rinishida, ammo ko‘p hollarda Hz yoki kHz larda berilgan maxsus talablardan foydalaniladi. O‘tkazish polosasidagi va o‘tkazmaslik polosasidagi farqlanishlar oddiy sonlar orqali yoki desibellarda ifodalanishi mumkin. Misol uchun, o‘tkazmaslik polosasidagi so‘nishning eng kichik qiymati A va o‘tkazish polosasidagi maksimal o‘zgarish (farqlanish) desibellarda impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun quyidagicha ifodalanadi:

$$A \text{ (o‘tkazmaslik polosasidagi so‘nish)} = -20\lg(1+\delta\ ) \qquad (5.5a)$$

$$A \text{ (o‘tkazish polosasidagi farqlanish)} = -20\lg(1+\delta\ ). \qquad (5.5a)$$

Raqamli filtr faza-chastota xarakteristikasiga talablar ko‘p hollarda faza xarakteristikasi nochiziqliligi ko‘rsatkichi keltiriladi yoki faza xarakteristikasi ideal chiziqli bo‘lishi talab etiladi.

5.3.2. Raqamli filtr koeffisientlarini hisoblash

Bu bosqichda approksimatsiya usullaridan biri tanlanadi va impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun $h(k)$ koeffisientlar va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun a va b koeffisientlar hisoblanadi. Koeffisientlarni hisoblash usuli ushbu koeffisientlarning impuls xarakteristikasi chekli yoki cheksiz filtrga tegishli ekanligiga bog‘liq.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrning koeffisientlarini hisoblash an’ana bo‘yicha ma’lum analog filtrlarning xarakteristikalarini unga mos raqamli filtrlar xarakteristikalariga almashtirishga asoslangan. Bunda ikki asosiy yondashishdan foydalaniladi: impuls xarakteristikani invariant almashtirish va bichiziqli almashtirish usuli.

Impuls xarakteristikani invariant usuldan foydalanib almashtirishda analogli filtrni raqamliga almashtirilganda birlamchi analog filtrning impuls xarakteristikasi saqlanmaydi. Ichki bir-birini ustiga tushishi sababli ushbu usulni yuqori chastota filtrlari va rejektor filtrlar uchun qo'llab bo'lmaydi.

Ikkinchi tomondan bichiziqli (ikki chiziqli) usul juda samarali filtrlashni ta'minlaydi va chastota tanlovchan filtrlarning koeffisientlarini hisoblashga yaxshi mos keladi. Natijada an'anaviy xarakteristikali raqamli filtrlarni: Battervort, Chebishev va elliptik filtrlarni yaratish mumkin bo'ladi.

Bichiziqli usulda yaratilgan filtrlar, umuman olganda an'anaviy filtrlar amplituda xarakteristikasiga o'xshash, ammo vaqt bo'yicha boshqa xossalarga ega bo'ladi. Impuls xarakteristikani invariant almashtirish usuli analog tizimlarni modellash uchun yaxshi bo'lib, ammo chastota tanlovchi impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun bichiziqli usuldan foydalanilgani ma'qul.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar koeffisientlarini hisoblashda uning o'rnini bosuvchi (alternativ) nol va qutblarni joylashtirish usulidan ham foydalansa bo'ladi – bu usuldan oddiy filtrlarning koeffisientlarini oson hisoblash imkoniyatini beradi. Shu bilan birga, bu usuldan yaxshi amplituda xarakteristikali filtrlarni hisoblash uchun tavsiya etilmaydi, chunki bunda juda ko'p nol va qutblar borligi hisoblash hajmini oshirib yuboradi.

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini bir necha usullar bilan hisoblash mumkin: kesish (tortish – vaznni aniqlash), chastota bo'yicha tanlash va Parks-Mak-Klippan optimal algoritmi.

Kesish usuli impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini hisoblashning juda oson va moslashuvchan usuli hisoblanadi, ammo loyihalovchi, ishlab chiqaruvchiga filtr parametrlarini kerakli miqdorda o'zgartirish imkoniyatini bermaydi.

Chastota bo'yicha tanlash usuli shu bilan o'ziga e'tiborni tortadiki, u yordamida impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni rekursiv shaklda amalga oshirish imkoniyatini beradi, bu sonli hisoblashni qo'llash nuqtai nazaridan e'tiborli. Ammo bu usulga filtr parametrlarini boshqarish va o'zgartirish uchun moslashuvchanlik yetishmaydi.

Hozirda sanoat ishlab chiqarayotgan raqamli filtrlarda optimal usuldan foydalaniladi, chunki bu usul bilan impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning unga qo'yilgan texnik talabga javob berishiga erishiladi. Shuning uchun bunday filtrlarni loyihalashda dastlab optimal usuldan foydalanib ko'rish kerak (agar boshqa usuldan foydalanish sharti avvaldan belgilangan bo'lmasa).

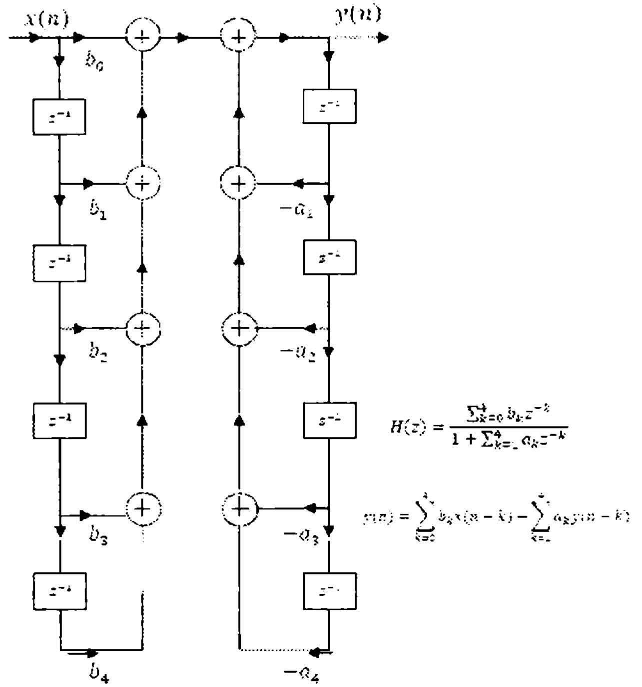
5.3.3. Filtrni unga mos keluvchi struktura orqali ifodalash

Bu bosqichda berilgan $H(z)$ uzatish koeffisientini unga mos filtrlovchi tarkib (struktura) orqali ifodalash amalga oshiriladi. Filtr tarkibini tasvirlash uchun ko‘p hollarda blok-sxemalar yoki funksional sxemalardan foydalaniladi va ularda raqamli filtrni amalga oshirishni osonlashtirish uchun hisoblash amallarini bajarish ketma-ketligi ham ko‘rsatiladi.

Foydalaniladigan struktura qaysi tur filtrni impuls xarakteristikasi chekli yoki cheksiz filtrni tanlanganligiga bog‘liq.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun quyidagi uch shakl strukturalardan foydalaniladi: to‘g‘ri, kaskadli va parallel shakldagilar.

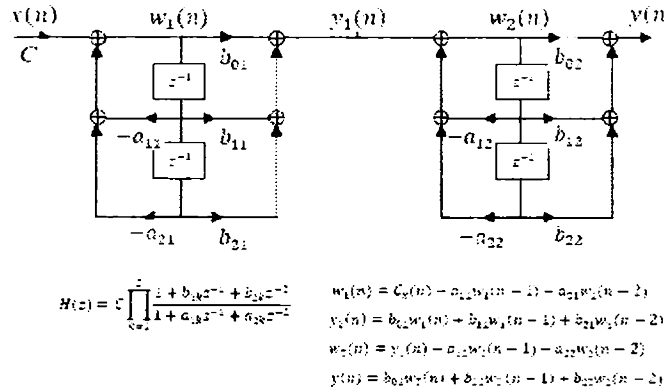
To‘g‘ri shakl – bu impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uzatish funksiyasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri ifodalash (5.4-rasm).



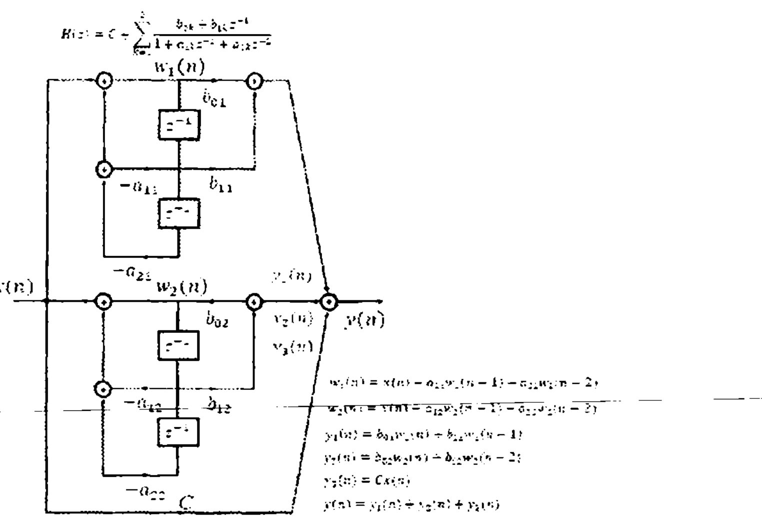
5.4-rasm. To‘rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish to‘g‘ri shakl strukturasi

Kaskad shaklida – impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uzatish funksiyasi (5.5-rasm) bir necha bor takrorlanadi va ikkinchi tartibli zvenolar ko‘paytmasi orqali ifodalanadi.

Parallel shaklda – $H(z)$ ikkinchi tartibli zvenolar yig‘indisi shaklida joylashtiriladi (bunda elementar kasrlardan foydalaniladi). 5.6-rasmda uzatish koeffisientlari va farqlanish tenglamalarining filtr strukturasini tasvirlovchi turlari keltirilgan.



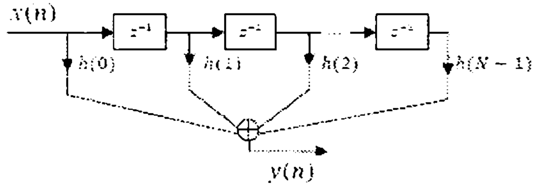
5.5-rasm. To‘rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish kaskad strukturasi



5.6-rasm. To‘rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish parallel strukturasi

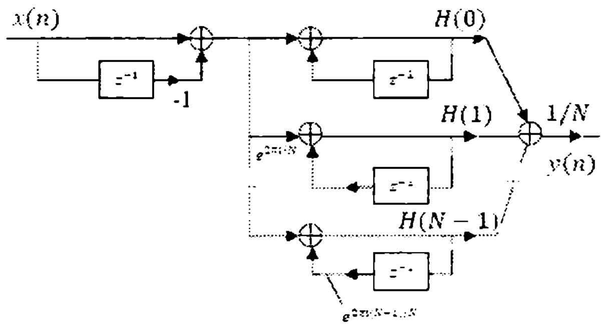
Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalash va yaratishda parallel va kaskad strukturalaridan eng ko‘p foydalaniladi, chunki ular nisbatan sodda filtratsiya algoritmlari orqali amalga oshiriladi va ularning cheklangan sonli bitlardan foydalanib amalga oshirilishiga sezgirligi to‘g‘ri strukturali filtrlarning sezgirligiga nibatan kichikroq.

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni loyihalash va yaratishda eng ko‘p foydalaniladigan struktura – bu to‘g‘ri struktura (5.7-rasm), chunki uni amalga oshirish boshqa strukturalarga qaraganda oson.

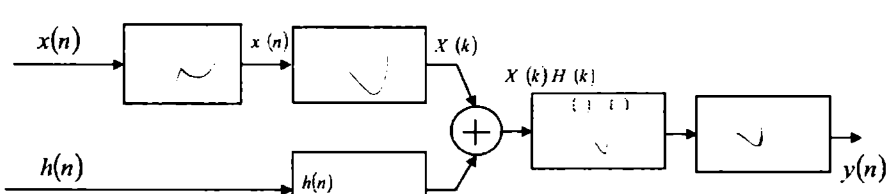


5.7-rasm. Impuls xarakteristikasi chekli filtrni amalga oshirish to‘g‘ri strukturasi (transversal filtr)

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning (5.7-rasm) bunday struktura asosida yaratilganini ba’zan bir necha chiqish nuqtalari bor kechiktirish liniyasi yoki transversal filtr deb ataladi. Bundan tashqari, ya’ni boshqa ikki strukturadan foydalaniladi: chastotasi tanlangan struktura va tezkor o‘rash strukturasidan ham foydalaniladi (5.8-rasm).



a



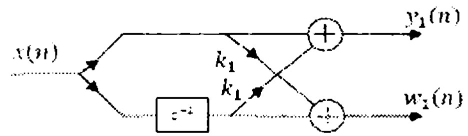
b

5.8-rasm. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrni tanlangan chastota asosida amalga oshirish strukturasi (*a*) va tezkor o‘ram olish sxemasi (*b*)

Transversal strukturaga qaraganda tanlangan chastota (qiymati) bo'yicha hisoblash nisbatan samarador, chunki kam sonli koeffisientlarni hisoblash talab etiladi. Ammo uni amalga oshirish oson emas, chunki u katta xotirani talab qiladi. Tezkor o'ram (svertka)dan Fure tezkor almashtirishi (FTA) afzalliklaridan foydalaniladi, bu usul yana shunisi bilan e'tiborliki, u yordamida signal spektrini ham hisoblash imkoni mavjud.

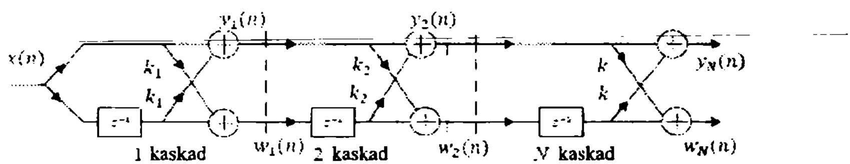
Bundan tashqari raqamli filtrlarni amalga oshirishning juda ko'p strukturaviy sxemalari mavjud, ammo ularning ko'pchiligi faqat ma'lum sohalarda foydalanish uchun mo'ljallangan.

Misol uchun panjarasimon strukturadan nuqt signallariga ishlov berishda va chiziqli bashoratlash sohalarida foydalaniladi. Panjarasimon strukturadan impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarini ifodalashda ham foydalanish mumkin, bunda ular yagona kirish va bir juft chiqishlar orqali (5.9-rasm) standart ko'rinishda tasvirlanadilar.

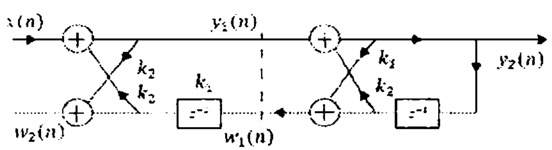


5.9-rasm. Panjarasimon struktura

U asosida olingan panjarasimon struktura orqali impuls xarakteristikasi chekli N nuqtali filtrni ta'riflovchi sxema 5.10*a*-rasmda keltirilgan va hamma qutblari ma'lum ikkinchi tartibli (faqat maxraj koeffisientlari keltirilgan) impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni ifodalashga mo'ljallangan struktura 5.10*b*-rasmda keltirilgan.



a



b

5.10-rasm. N kaskadli panjarasimon impuls xarakteristikasi chekli filtr (a) va ikki kaskadli panjarasimon hamma qutblari berilgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtr strukturasi

5.3.4. Razryadlar soni cheklanganligining filtr tezkorligi va barqarorligiga ta'siri

Approksimatsiyalash va amalga oshirish bosqichlari filtrlarni cheksiz aniqlik bilan yoki juda yuqori aniqlik bilan ishlashini nazarda tutadi. Shuning bilan birga ularni amalga oshirishda filtr koeffisientlarini cheklangan sonli bitlar (odatda 8 dan 16 tagacha bitlar) orqali ifodalash talab etiladi. Bundan tashqari farqlanish tenglamasidagi amallar aniqligi cheklangan arifmetikadan foydalanib amalga oshiriladi.

Razryadlardagi bitlar sonining cheklanganligi filtr tezkorligini kamayishiga olib keladi va natijada filtr barqarorligi yomonlashadi. Shuning uchun loyihalovchi ushbu holatlarni albatta e'tiborga olishi va filtr koeffisientlarini ifodalash uchun tegishli davomiylikni (bitlar sonini) tanlashi, filtr o'zgaruvchanlari (ya'ni, kirish va chiqish signallari o'lchamlari)ni va filtrda arifmetik amallarni bajarilishini e'tiborga olishi kerak. Filtr tezkorligini yomonlashishiga olib keluvchi sabablar quyidagilardan iborat.

- *Signalni filtr kirishi va chiqishida kvantlash.* Xususan, vaqt bo'yicha kirish signallarini kvantlash natijasida ARO'da hosil bo'ladigan shovqin – bu e'tiborga loyiq kattalik.
- *Koeffisientlarni kvantlash.* Ushbu jarayon impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlar chastota xarakteristikalarining buzilishiga va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning barqaror bo'lmasligiga olib kelishi mumkin.
- *Butunlash xatoligi.* Filtrlash uchun cheklangan aniqlikdagi arifmetikadan foydalanish natijalarini ifodalash qo'shimcha bitlar kiritilishini talab qiladi. Agar kvantlash natijasida olingan kodlar razryadi (bitlar soni) cheklangan bo'lsa, butunlash shovqini paydo bo'ladi. Natijada impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarda barqarorlikning yomonlashishiga o'xshash holatlar yuz berishi mumkin.
- *To'lish.* Bu hodisa yig'ish natijasi "so'z" uchun ruxsat etilgan davomiylikdan katta bo'lganda ro'y beradi. Bu chiqish signali o'lchamlarining noto'g'ri bo'lishiga va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar barqarorligi yomonlashishiga sabab bo'ladi.

Raqamli filtr sifat ko'rsatkichlarining yomonlashishi quyidagilarga bog'liq:

1) filtrlashda foydalaniladigan so'zlar uzunligi va arifmetika turiga;

2) filtr koeffisientlarini kvantlash va o'zgaruvchan koeffisientlarni tanlangan o'lchamlarga olib kelish usuliga;

3) filtr strukturasiga.

Ushbu sabablarni bilgan holda loyihalovchi va ishlab chiqaruvchi razryadlar soni cheklanganligining filtr tezkorligiga ta'sirini baholashi va tegishli chora-tadbirlar ko'rishi mumkin bo'ladi.

Filtrlarga qo'yilgan talablarga qarab ba'zi salbiy ta'sirlarni e'tiborga olmaslik mumkin. Misol uchun, agar filtr dastur shaklida yuqori darajali tilda bo'lib, kompyuter yordamida amalga oshirilsa, u holda koeffisientlarni kvantlash va butunlash xatoliklarini e'tiborga olmaslik mumkin. Kirish va chiqish signallarini filtr koeffisientlari va arifmetik amallar natijalariga real vaqtda ishlov berishda davomiyligi cheklangan so'zlar (odatda 8, 12 va 16 bit)dan foydalaniladi. Bu hollarda amalda hamma vaqt kvantlashni filtr tezkorligiga ta'sirini tahlil etish kerak.

5.3.5. Raqamli filtrni loyihalash

Raqamli filtr koeffisientlarini hisoblash unga mos amalga oshirish strukturasini tanlash, tanlangan davomiylikdagi so'zlarga tegishli koeffisientlarni va filtr o'zgaruvchi argumentlarning raqamliga almashtirish natijasida filtr sifat ko'rsatkichlarining yomonlashishi ruxsat etilganidan katta emasligiga ishonch hosil qilgandan so'ng farqlanish tenglamalarini apparat yoki dastur darajasida amalga oshirish talab etiladi. Tanlangan usuldan qat'iy nazar filtr chiqishidagi signal har bir o'lcham uchun farqlanish tenglamasiga asoslangan tartibda hisoblanishi kerak (bunda vaqt bo'yicha amalga oshirish nazarda tutilgan).

Farqlanish tenglamalari (5.2) va (5.3) lardan ko'rinadiki $y(n)$ ni filtr chiqish signalini hisoblash, ko'paytirish, qo'shish, ayirish va kechiktirish amallari orqali bajariladi. Demak filtrni amalga oshirish uchun quyidagi asosiy tashkil etuvchilar bo'lishi talab qilinadi:

- xotira (masalan, PZU) filtr koeffisientlarini saqlash uchun;
- xotira (masalan, OZU) hozirgi va avvalgi kirish va chiqish signallarini xotirada saqlash uchun, ya'ni $\{x(n), x(n-1), ...\}$va $\{y(n), y(n-1), ...\}$;

apparat yoki dasturiy ko'paytirgich (ko'paytirgichlar);

- yig'uvchi yoki arifmetik mantiq sxemasi.

Raqamli filtrlarni ishlab chiqaruvchi unga tegishli asosiy ma'lumotlarni va undan ma'lum masalani yechish uchun mo'ljallanganligiga kafolat beradi. Raqamli filtrni yaratishda u bajaradigan vazifa – signallarga raqamli ishlov berish real vaqtda yoki modelda (paketli ishlov berish) foydalanishiga qarab turli struktura va ~~elementlardan tashkil topgan bo'ladi~~.

Model vaqtda signallarga ishlov berishda hamma ma'lumotlar qandaydir xotira qurilmasida saqlanayotgan bo'ladi. Bu holat qandaydir tajriba natijalarini olish va so'ngra ularga ishlov berishda yuz beradi. Bunday hollarda raqamli filtr ko'p hollarda yuqori darajali dasturlash tilida amalga oshiriladi va universal kompyuterda bajariladi. Shunday qilib, signalga modelli ishlov berishni faqat dasturiy amalga oshirish ko'rinishda ta'riflash mumkin. Bunda ishlab chiqaruvchi signalga raqamli ishlov berish jarayonini tezlashtirish uchun qo'shimcha apparat vositalarini kiritishi mumkin.

Signallarga real vaqtda ishlov berishda filtrlardan quyidagilar talab etiladi: kirish signali o'lchami $x(n)$ bor vaqtda ishlash va chqish signali $y(n)$ o'lchamini, kirish signali navbatdagi o'lchami paydo bo'lgungacha hosil qilish, yoki kirish signallari bloklariga proporsional bo'lgan chiqish signallari bloklarin olish (misol uchun, Fure tezkor almashtirishdan foydalanib). Agar diskretizatsiyalash chastotasi juda katta yoki yuqori tartibli filtr kerak bo'lsa real vaqtda filtrlash tezkor va maxsus apparat vositasini talab qilishi mumkin. Audiosignallar bilan ishlashda foydalanish uchun ko'p hollarda DSP56000 (Motorola) yoki TMS320C25 (Texas Instruments) firmalarining SRIB protsessorlari tezkorligi yetarli hisoblanadi. Bu protsessorlar tarkibida hamma talab qilinadigan asosiy bloklari, shu jumladan ko'paytirish apparaturalari bor. SRIB bloklarini ishlab chiqaruvchi (loyihalovchi) uning tarkibiga, ma'lumot manbai va uni oluvchi turiga qarab filtrga unga mos raqamli apparat bilan ta'minlangan kiritish-chiqarish interfeyslarini ham kiritishi mumkin (misol uchun, analog-raqam o'zgartirishlarda).

Nazorat savollari

1. *Impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarning bir-biridan farqi nimada?*
2. *Rekursiv va norekursiv filtrlarning bir-biridan farqi nimada?*
3. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlar fazaviy xarakteristikasi qanday ko'rinishga ega?*
4. *Raqamli filtrlarning barqarorligini qanday aniqlash mumkin?*
5. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarni loyihalash bosqichlari nimalardan iborat?*
6. *Impuls xarakteristikasi cheklangan va cheklanmagan filtrlarning strukturaviy sxemalarini chizib ko'rsating.*
7. *Chastotalar qiymati va tezkor o'rami orqali amalga oshiriladigan impuls xarakteristikasi cheklangan filtr strukturaviy sxemasini keltiring.*
8. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtr panjarasimon strukturaviy sxemasi.*

6. IMPULS XARAKTERISTIKASI CHEKLI FILTRLARNI LOYIHALASH

Raqamli filtrlarni loyihalashni bir-biri bilan bog'liq beshta bosqichga ajratish mumkin: filtrga qo'yiladigan asosiy texnik talablar, koeffisientlarni hisoblash, xatoliklarni tahlil qilish, filtrni apparat shaklida va (yoki) dastur shaklida amalga oshirish.

Filtrga asosiy texnik talablar undan foydalanish sohasiga bog'liq bo'lib, amplituda va (yoki) faza xarakteristikasiga talablar albatta kiritilishi kerak.

Koeffisientlarni hisoblash, bu asosan filtrga qo'yiladigan texnik talablarga javob beradigan $h(k)$ qiymatlarini topishdan iborat. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlar koeffisientlarini hisoblashda eng ko'p foydalaniladigan usullar: kesish (vaznini aniqlash); chastotani tanlash (aniqlash) va optimal usullar.

6.1. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning asosiy xususiyatlari

1. Standart impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlar quyidagi tenglamalar bilan xarakterlanadi:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k), \qquad (6.1a)$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}. \qquad (6.1б)$$

bunda $h(k)$, $k=0,1,...N-1$ – impuls xarakteristika koeffisienti, $H(z)$ – filtr uzatish koeffisienti, N – filtr koeffisientlari soni. (6.1a) formula bu impuls xarakteristikasi cheklangan filtr farqlanish tenglamasi. Ushbu tenglama argumenti vaqt bo'lib, u impuls xarakteristikasi chekli filtrni rekursiv ko'rinishda ifodalaydi: hozirda uning chiqishidagi signal $y(n)$ kirishidagi signal $x(n)$ ning hozirgi ~~vaqtdagi va oldingi vaqtlardagi qiymatlari funksiyasi. Impuls xarakteristikasi~~ chekli filtrni ushbu shaklda, ya'ni (6.1a) formula to'g'ri tasavvur etilsa, u holda filtrlar hamma vaqt barqaror bo'ladi. (6.1b) formula orqali filtr uzatish koeffisientini tahlil qilish va amplituda-chastota xarakteristikasini hisoblash mumkin.

2. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar aniq chiziqli fazaviy xarakteristikaga ega.

3. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni amalga oshirish juda oson. Hozirda ishlab chiqilgan SRIB protsessorlaridan impuls xarakteristikasi chekli filtrlar sifatida foydalanish mumkin. Bundan tashqari norekursiv impuls xarakteristikasi chekli filtrlar impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarga qaraganda razryadlar soni chekliligiga kam bog'liq.

6.2. Chiziqli fazaviy xarakteristikali raqamli filtrlar

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning asosiy muhim xususiyatlaridan biri ularda yuqori darajada chiziqli fazaviy xarakteristika olish mumkin. Signal raqamli filtrdan o'tganda uning amplituda va (yoki) fazasi modifikatsiyalanadi. Signalning o'zgarish sababi va qiymati filtrning amplituda va faza xarakteristikasiga bog'liq. Fazani modifikatsiyalanish qiymatini baholashning qulay turlaridan biri signalning fazasi yoki guruhiy kechikishi hisoblanadi. Agar signal spektri bir necha chastotalardan iborat bo'lsa (misol uchun, tovush va modulyatsiyalangan signallar) filtr fazasining kechikishi bu vaqt bo'yicha kechikish qiymati bo'lib, u signalning har bir spektral tashkil etuvchilari filtrdan o'tishdagi kechikishi. Guruhiy kechikish bu signal spektri tashkil etuvchilarining vaqt bo'yicha o'rtacha kechikishi. Matematik usulda fazaviy kechikish faza surilishi manfiy qiymatining chastotaga nisbati (bo'lish) orqali aniqlanadi, guruhiy kechikish esa – bu fazadan chastota bo'yicha olingan hosilaning minusli qiymatiga teng:

$$T_p = -\theta(\omega)/\omega, \qquad (6.2а)$$

$$T_g = -d\theta(\omega)/d\omega. \qquad (6.2б)$$

Nochiziqli fazaviy xarakteristikali filtr u orqali o'tadigan signal fazasini o'zgartiradi (buzadi). Bunda signal spektrining tashkil etuvchilari ularning chastotalariga proporsional bo'lmagan qiymatlarga o'zgaradi, natijada ular orasidagi garmonik bog'lanishlar (fazalar) o'zgaradi. Bunday buzilishlar ko'p hollarda zararli bo'lib, uni ro'y bermasligi uchun signal spektri joylashgan chastotalar diapazonida fazaviy xarakteristikasi chiziqli filtrlardan foydalanish kerak (misol uchun, ma'lumotlarni uzatishda, musiqani eshitish, videotasvirlarni ko'rish va biomedisinada signal o'tayotgan filtr fazaviy xarakteristikasi chiziqli bo'lishiga alohida talablar qo'yiladi).

Agar quyidagi munosabatlar bajarilsa filtr chiziqli fazaviy xarakteristikaga ega deb hisoblanadi:

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega, \qquad (6.3а)$$

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega, \qquad (6.3б)$$

bunda α va β – o'zgarmas kattaliklar. Agar filtr (6.3a) shartiga javob bersa, u holda o'zgarmas guruh va faza kechikishi ro'y beradi. (6.3a) shart bajarilishi uchun filtr impuls xarakteristikasi musbat va simmetrik bo'lishi kerak. Bu holat uchun filtr fazaviy xarakteristikasi faqat filtr uzunligining funksiyasi bo'ladi

$$h(n) = h(N-n-1), \quad \begin{cases} n = 0,1 \ldots (N-1)/2 \quad (N - \text{toq}), \\ n = 0,1 \ldots (N/2) - 1 \quad (N - \text{toq}). \end{cases}$$

$$\alpha = (N-1)/2.$$

(6.3b) shart bajarilishi uchun filtr guruhiy kechiktirishi faqat o'zgarmas bo'lishi kerak. Bu hol uchun filtr impuls xarakteristikasi manfiy simmetrik bo'ladi:

$$h(n) = -h(N - n - 1),$$
$$\alpha = (N - 1)/2, \quad \beta = \pi/2.$$

Fazaviy xarakteristikasi chiziqli impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlar impuls xarakteristikasi chekli filtrlar oialsida alohida o'ringa ega bo'lib, faqat ularning o'ziga xos ko'rsatkichlarga ega bo'lgan, ushbu filtrlarni loyihalash va amalga oshirishga ta'sir ko'rsatadi.

6.3. Chiziqli fazaviy xarakteristikali impuls xarakteristikasi chekli raqamli filtrlarning turlari

Chiziqli fazaviy xarakteristikali impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning to'rtta turi bo'lib, ular N ning juftligi va $h(n)$ ning simmetriklik turi (musbat va manfiy) bilan bir-biridan farq qiladi. 6.1-rasmda chiziqli fazaviy xarakteristikali to'rt tur filtrlar impuls xarakteristikalari keltirilgan.

Ushbu filtrlarning asosiy o'ziga xos xususiyatlari jadval shaklida keltirilgan (6.1-jadval).

6.1-jadval.

Chiziqli fazaviy xarakteristikali impuls xarakteristikasi cheklangan to'rt turli filtrlarning o'ziga xos xususiyatlari

Impuls xarakteristikasi simmetriyasi	Koeffi-sientlar soni, N	Chastota xarakteristikasi, $H(\omega)$	Chiziqli fazaviy xarak-teristika turi
Musbat simmetriya, $h(n) = h(N-1-n)$	toq	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n)\cos(\omega n)$	1
	juft	$e^{-i\omega(N-1)/2}\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos(\omega(n-1/2))$	2
Manfiy smmetriya, $h(n) = -h(N-1-n)$	toq	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum_{n=1}^{(N-1)/2} a(n)\sin(\omega n)$	3
	juft	$e^{-i[\omega(N-1)/2-\pi/2]}\sum_{n=1}^{N/2} a(n)\sin(\omega(n-1/2))$	4

Ikkinchi tur filtr chastota xarakteristikasi (musbat simmetrik koeffisientlar va juft davomiylik) $f = 0{,}5$ bo'lganda hamma vaqt nolga teng (diskretlash chastotasining yarim qiymati, chunki hamma chastotalar diskretlash chastotasiga nisbatan nisbiylashtirilgan (normallashtirilgan)). Shuning uchun bu tur filtrlardan yuqori chastota filtrlari sifatida foydalanib bo'lmaydi. 3- va 4-filtrlar (manfiy simmetrik koeffisientli) 90° ga teng bo'lgan faza siljishini kiritadi va bunday filtrlarning chastota xarakteristikasi $f=0$ bo'lganda nolga teng, shuning uchun bu turdagi filtrlardan past chastota filtri sifatida foydalanib bo'lmaydi. Bundan tashqari 3-tur filtrlarning xarakteristikalari $f=0{,}5$ bo'lganda hamma vaqt nolga teng, shuning uchun filtr bu turidan yuqori chastota filtri sifatida foydalanib bo'lmaydi.

$$a(0)=h[(N-1)/2],\ a(n)=2h[(N-1)/2-n],\ b(n)=2h(N/2-n).$$

1-tur filtrlar eng universal hisoblanadi. 3- va 4-tur filtrlardan filtrlarning differensiyalash elementi (qismi) shaklida va ular 90° ga faza siljishini amalga oshirish xususiyatlariga ega bo'lganliklari uchun ulardan Gilbert almashtirish (o'zgartirish)ini amalga oshirish uchun ko'p holatlarda qo'llaniladi.

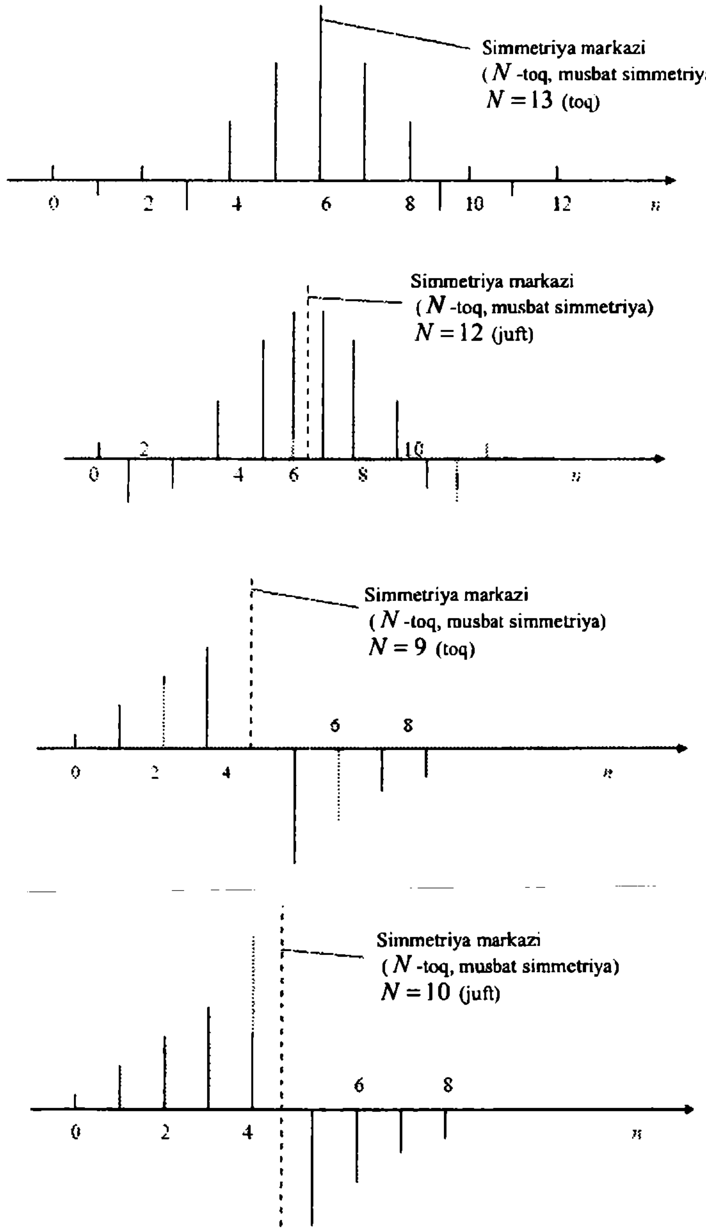
Faza kechikishini (1-va 2-turdagi filtrlar uchun) yoki guruhiy kechikishini (hamma to'rt tur filtrlar uchun) filtr koeffisientlari orqali ifodalash mumkin, ularni filtr koeffisientlari soni orqali shunday ifodalash mumkinki, natijada filtr fazaviy va guruhiy siljitishi nolga teng bo'lishi ta'minlanadi. Misol uchun, birinchi va ikkinchi tur filtrlar uchun faza kechikishi quyidagicha ifodalanadi:

$$T_p=\left(\frac{N-1}{2}\right). \qquad (6.4a)$$

va uchinchi hamda to'rtinchi turlari uchun guruhiy kechikishi esa quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$T_g=\left(\frac{N-1-\pi}{2}\right). \qquad (6.4б)$$

bunda T – diskretlash davri.



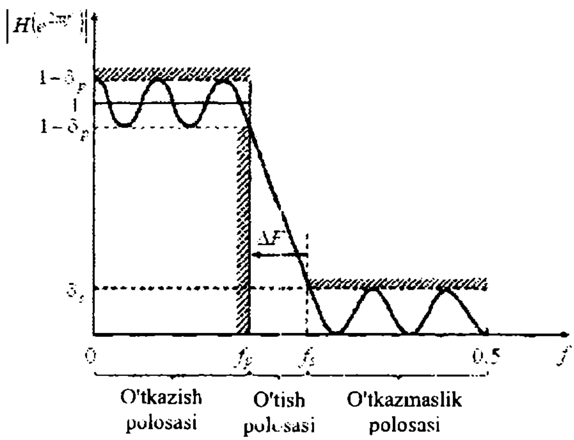
6.1-rasm. Chiziqli fazaviy xarakteristikali to‘rt turdagi filtrlar impuls xarakteristikalari koeffisientlari

6.4. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni loyihalash bosqichlari

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni yaratish bosqichlari, umuman olganda 5.3-paragrafda ko'rilgan raqamli filtrlarni yaratish bosqichlaridan farq qilmaydi. Ammo, ular ba'zi o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lib, ularni alohida-alohida ko'rib chiqamiz.

6.4.1. Impuls xarakteristikasi chekli raqamli filtrlar texnik xarakteristikalari

Raqamli filtrlarning fazaviy xarakteristikalarini tahlil etishda uning xossalarini ko'rsatish uchun uning juft yoki toq simmetrik ekanligini bilish yetarli (bunda filtr fazaviy xarakteristikasi chiziqli deb faraz etiladi). Impuls xarakteristikasi chekli filtr amplituda-chastota xarakteristikasi odatda ruxsat etilgan farqlanishlar orqali beriladi. Ushbuni past chastota filtrlari uchun tasvirlovchi chizma 6.2-rasmda keltirilgan.



6.2-rasm. Past chastotalar filtri texnik xarakteristikalari. O'tkazish va o'tkazmaslik polosalaridagi farqlar dB larda ifodalanadi. O'tkazish polosasida farqlar $20\lg(1+\delta\ )$ dB ga; o'tkazmaslik polosasidagi farqlar $-20\lg(\delta\ )$ dB ga teng.

Amalda $\delta($ va δ lar desibellarda ifodalanadi (6.2-rasm). f va f chastotalari orasidagi kenglik filtrning asosiy o'tkazish polosasi bilan signal spektr tashkil etmaydigan chegara orasidagi chastotalar polosasi – o'tish polosasi deb ataladi. Filtrning yana bir asosiy parametri – bu uning uzunligi N bo'lib, u filtr koeffisientlari sonini bildiradi. Ko'p hollarda yuqorida keltirilgan ko'rsatkichlar impuls xarakteristikasi chekli filtr chastota xarakteristikasini aniqlaydi.

Bundan tashqari raqamli filtr yana bir qator amaliy ahamiyatga ega bo'lgan texnik ko'rsatkichlarga ega: misol uchun, filtr uchun maksimal koeffisientlar soni (bunday cheklashlar ma'lum hollarda kiritiladi, misol uchun signalga ishlov berish tezligi cheklangan va ma'lum bo'lsa).

6.4.2. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini hisoblash usullari

Ko'pchilik impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini hisoblash (taqribiy hisoblash) usullarining yagona maqsadi $h(n)$ qiymatlarini olish bo'lib, bu filtrlar amplituda-chastota xarakteristikalariga, xususan ularning signal o'tkazish qobiliyatiga tegishli bo'lgan texnik talablarga javob berishi kerak. $h(n)$ ni hisoblashning bir necha usullari mavjud. Ulardan eng ko'p foydalaniladiganlari: kesish usuli, optimal usul va tanlangan chastotalar usuli.

Har qaysi uch usul impuls xarakteristikasi chekli filtr uchun chiziqli fazaviy xarakteristika olish imkoniyatini beradi.

Taqqoslash usuli. Bu usulda filtr chastota xarakteristikasi $H(\omega)$ ushbu filtr impuls xarakteristikasi $h(n)$ bilan Fure teskari almashtirishi orqali bog'langanligidan foydalaniladi:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_D(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \qquad (6.5)$$

D indeksidan ideal va real amaldagi impuls xarakteristikalarini bir-biridan farqlash foydalaniladi. Bunday farqni bilishga nima ehtiyoj borligini biroz keyinroq ko'rib chiqamiz. Agar $H(\omega)$ ma'lum bo'lsa $h(n)$ ni (6.5) tenglamaning har ikki tomoniga Fure almashtirishini qo'llash orqali olish mumkin. Yuqoridagini tasdiqlash uchun past chastotalar filtrini yaratish kerak deb hisoblaymiz. Ishni 6.3*a*-rasmda keltirilgan ideal chastota xarakteristikasidan boshlaymiz, bu rasmda ω_c – normallashtirilgan chastotalar shkalasidagi kesish chastotasi ($T = 1$).

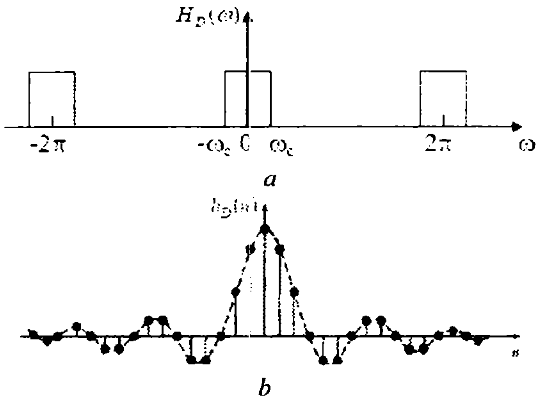
Ideal filtr chastotalar xarakteristikasida chastota $-\omega_c$ dan ω_c gacha o'zgaradi deb, integrallash amalini soddalashtiramiz va quyidagi impuls xarakteristikasini olamiz:

$$h_D(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \times e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega =$$

$$= \frac{2f_c \sin(n\omega_c)}{n\omega_c}, \quad n \neq 0, \quad -\infty \le n \le \infty, \qquad (6.6)$$

$$= 2f_c, \quad n = 0.$$

Yuqori chastotalar ideal filtri polosa filtri va rejektor filtrlarining impuls xarakteristikalari (6.6) tenglama 6.2-jadvaldan topiladi.



6.3-rasm. Past chastotalar filtrining ideal chastota xarakteristikasi (a), past chastotalar filtrining impuls xarakteristikasi (b)

6.2-jadval.

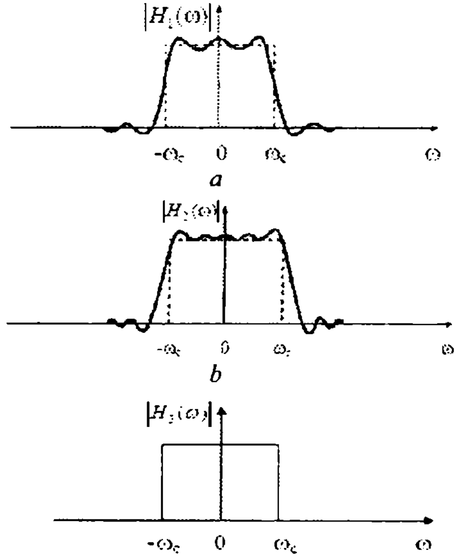
Standart chastota tanlovchi filtrlarning ideal impuls xarakteristikalari.

Filtr turi	Ideal chastota xarakteristikasi, $h\ (0)$	
	$h\ (n),\quad n \neq 0$	$h\ (0)$
Past chastotalar filtri	$2f_c \dfrac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$2f_c$
Yuqori chastotalar filtri	$-2f_c \dfrac{\sin(n\omega_c)}{n\omega_c}$	$1-2f_c$
Polosa filtri	$2f_2 \dfrac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2} - 2f_1 \dfrac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1}$	$2(f_2-f_1)$
To'sqinlik qiluvchi filtr	$2f_1 \dfrac{\sin(n\omega_1)}{n\omega_1} - 2f_2 \dfrac{\sin(n\omega_2)}{n\omega_2}$	$1-2(f_2-f_1)$

6.2-jadvalda f, f va f lar chastota o'tkazish polosalari chegaraviy chastotalari yoki chastota o'tkazmaslik chastotalari, N – filtr uzunligi.

Past chastota filtri impuls xarakteristikasi 6.3b-rasmda keltirilgan bo'lib, undan $h\ (n)$ ning $n=0$ ga nisbatan simmetrikligi (ya'ni $h\ (n)=-h\ (n)$) ma'lum bo'ladi. Shuning uchun uning fazaviy xarakteristikasi chiziqli (fazalar qiymati nolga teng). Ta'riflangan masalaga oddiy yondashish ba'zi bir muammolar bilan bog'liq. Ulardan eng muhimi $n=0$ nuqtadan uzoqlashgan sari $h\ (n)$ xarakteristikasi kichiklashib boradi, bu jarayon nazariya nuqtai nazardan $n=\pm\infty$ gacha davom etadi. Demak olingan filtr impuls xarakteristikasi cheklangan filtr emas.

Ideal impuls xarakteristikasi $n=0$ dan uzoqlashgan sari so'nishini e'tiborga olib, uni qandaydir kattalik M an katta bo'lgan n qiymatlari uchun $h\ (n)=0$ deb hisoblab qisqartirilishi mumkin. Ammo, buning natijasida zararli (keraksiz) notekislik va tebranishlar Gibbs xossasi deb ataladigan holat yuz beradi. Koeffisientlarni qisqartirishning filtr xarakteristikasiga ta'siri 6.4-rasmda keltirilgan.



v

6.4-rasm. Ideal impuls xarakteristika koeffisientlari sonini qisqartirish (cheklash)ni uning chastotalar xarakteristikasiga ta'siri *a*) 13 ta koeffisient qoldirilgan; *b*) 25 ta koeffisient qoldirilgan; *v*) koeffisientlar soni cheksiz ko'p

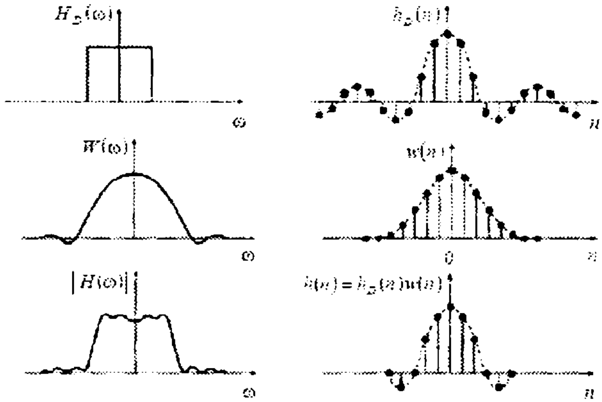
Qancha ko'p koeffisientlar qoldirilgan bo'lsa filtr orqali o'tgan signal spektri ideal filtr xarakteristikasiga yaqin bo'ladi (6.5*a*,*b*-rasmlar). Yuqorida ta'riflanganidek $h(n)$ ning to'g'ridan-to'g'ri kesilishi filtr ideal xarakteristikasini to'g'ri to'rtburchak shaklidagi vazn funksiyasiga ko'paytmasi bilan teng qiymatga ega

$$\omega(n) = 1, \quad |n| = 0, 1, \ldots, (M-1)/2$$

$$= 0$$

Bu chastotalar bo'yicha $H(\omega)$ ni $W(\omega)$ bilan o'ramiga ekvivalent bo'ladi, bunda $W(\omega)$ – $w(n)$ ning Fure ko'rinishi. $W(\omega)$ odatdagi klassik $\sin(x)/x$ ko'rinishida bo'lsa, u holda $h(n)$ ni qisqartirilishi filtr chastotalar xarakteristikasida tebranishlar paydo bo'lishiga olib keladi. Amaliyotda $h(n)$ ideal chastota xarakteristikasi unga mos keluvchi davomiyligi cheklangan vazn funksiyasi $W(n)$ ga ko'paytiriladi (6.5-rasm).

6.5*a*-rasmda filtrning ideal chastotalar xarakteristikasi va unga mos bo'lgan ideal impuls xarakteristikasi keltirilgan. 6.5*b*-rasmda davomiyligi cheklangan vazn funksiyasi va uning spektri keltirilgan. 6.5*v*-rasmda $h\ (n)$ ni $w(n)$ ga ko'paytirish natijasida olinadigan $h(n)$ funksiya keltirilgan.



6.5-rasm. $h(n)$ filtr koeffisientlari vaznini aniqlashni ko'rsatuvchi rasmlar

Tegishli chastotalar xarakteristikasidan ko'rinadiki, to'g'ridan-to'g'ri kesishga xos bo'lgan notekisligi va tebranishlari sezilarli darajada bartaraf etilganligi ko'rinadi. Shu bilan birga o'tish polosasi kengligi, to'g'ri to'rtburchakli funksiyasiga qaraganda katta. Ma'lumki, o'tish polosasi kengligi, vazn funksiyasi asosiy yaproqchasi kengligi bilan aniqlanadi. Funksiya yon yaproqchalari filtrning o'tkazish va o'tkazmaslik polosasida notekisliklarning paydo bo'lishiga sabab bo'ladi.

Vaznni aniqlash metodi qulay hisoblanadi, chunki undan foydalanish sodda va tushunish oson. Bu metoddan foydalanish hisoblashlar hajmini kamaytiradi.

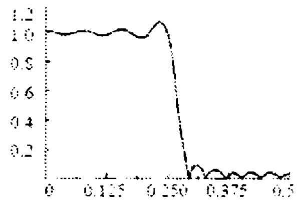
Bu metodning asosiy kamchiligi – undan foydalanish imkoniyatlari chekli filtrning signal spektral tashkil etuvchilarini o'tkazish va o'tkazmaslik polosasidagi maksimal notekisliklar taxminan bir-biriga teng, shuning uchun loyihalovchi filtr o'tkazish polosasida juda kichik notekislikni yoki o'tkazmaslik polosasida haddan tashqari katta so'nishlarni olishi mumkin.

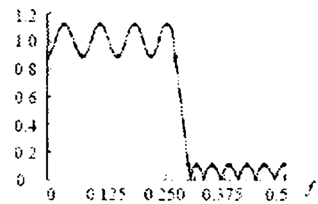
Ushbu metodda kesuvchi funksiya va talab etiladigan xarakteristikasi o'rami qatnashganligi sababli filtrning o'tkazish va o'tkazmaslik polosalari chegaralarini aniq talab etish mumkin emas.

Berilgan funksiya uchun uning chastota xarakteristikasidagi tebranishlar amplitudasi N ning qanday katta qilib tanlanishidan qat'iy nazar ma'lum bir kattalikka ega bo'ladi. Xuddi shuningdek filtr o'tkazmaslik polosasidagi so'nishlar ham ushbu tanlangan texnik funksiya orqali belgilanadi. Shunday qilib, filtrdan talab etiladigan texnik ko'rsatkich so'nishlarni ta'minlash uchun loyihalovchi ushbu talabga javob beradigan funksiyani tanlashi (topishi) kerak.

Ba'zi hollarda $H(\omega)$ formuladan foydalanish shunchalik murakkab bo'lishi mumkinki (6.5) formula orqali $h(n)$ ni analitik usulda topish maqsadga muvofiq emas. Bunday hollarda $h(n)$ ni tanlangan chastotalar metodi asosida olish, so'ngra vazn funksiyasini qo'llash kerak.

Optimallashtirish metodi. Filtr koeffisientlarini kesish (qisqartirish) metodi asosida hisoblashda talab etiladigan yoki ideal chastota xarakteristikasini to'g'ri tasvirlovchi – approksimatsiyalovchi funksiyani tanlash muammosi kelib chiqadi. Ba'zi koeffisientlarni taqqoslash (vzveshivanie) metodidan foydalanilganda filtr chastota xarakteristikasi yuqori chegarasida tebranishlar amplitudasi katta bo'ladi va undan uzoqlashgan sari kichiklashadi (6.6*a*-rasm). Agar ushbu tebranishlar filtrining o'tkazish va o'tkazmaslik polosalarida bir xil kattalikda bo'lsa, u holda talab etiladigan chastota xarakteristikasini approksimatsiyalash funksiyasi nisbatan yuqori aniqlikni ta'minlashiga erishish mumkin (6.6*b*-rasm).





6.6-rasm. Filtr chastotalar xarakteristikasini taqqoslash: *a*) filtrning kesish (qisqartirish) metodi asosida olingan chastotalar xarakteristikasi, *b*) optimal filtr chastotalar xarakteristikasi

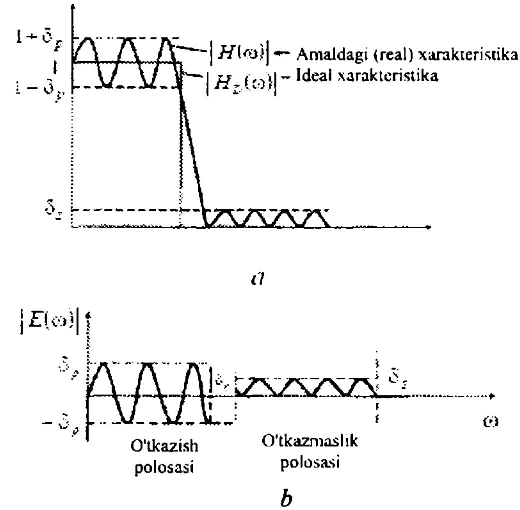
Optimizatsiyalash metodi uchun filtr o'tkazish va o'tkazmaslik polosalaridagi tebranishlar har bir polosa ichida bir xil kattaliklarga ega, ammo har ikki polosada umuman olganda turlichaligini asos qilib olingan. Past chastotalar filtrining 6.7-rasmda tasvirlangan chastotalar xarakteristikasini ko'rib chiqamiz. Filtr o'tkazish polosasida real xarakteristika $1-\delta$ dan $1+\delta$ gacha orasida tubranadi (o'zgaradi). Filtr o'tkazmaydigan polosasida uning xarakteristikasi 0 va δ oralig'ida bo'ladi.

Filtrlar ideal va real chastota xarakteristikalari orasidagi farqni xatolik funksiyasi sifatida qarash mumkin

a

$$E(\omega)=W(\omega)[H_D(\omega)-H(\omega)] \qquad (6.7)$$

bunda $H(\ )$ – ideal yoki talab etiladigan chastotalar xarakteristikasi, $W(\omega)$ – vazn funksiyasi bo'lib, u turli polosalarda approksimatsiyalash xatoligini aniqlash imkoniyatini beradi.



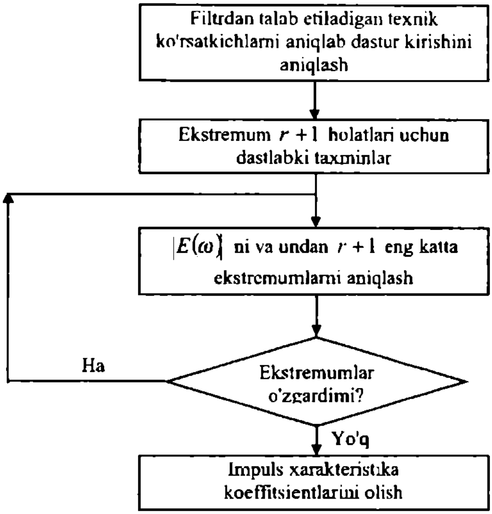
6.7-rasm. Past chastotalar optimal filtri chastota xarakteristikasi (*a*). Ideal va real xarakteristikalar orasidagi xatolik xarakteristikalari (*b*)

Optimallash metodining maqsadi – maksimal o'lchangan xatolik $|E(\omega)|$ maksimal qiymati o'tkazish va o'tkazmaslik polosasida minimal bo'lishini ta'minlovchi $h(n)$ filtr koeffisientlarini aniqlashdan iborat bo'lib, uni quyidagicha ifodalash mumkin

$$\min\left[\max|E(\omega)|\right].$$

$\max|E(\omega)|$ ni minimallashtirilganda filtr o'tkazish va o'tkazmaslik polosalari orasida bir xil tebranishlar amplitudasiga erishiladi, shu bilan birga chastota xarakteristikasi tebranish qutblari turlicha bo'lgan sathlar orqali o'tadi (6.6*b*-rasm). Chastota xarakteristikalaridagi tebranishlarni eng katta va eng kichik qiymatlarga ajratish shart emas, ularni belgilash yetarli hisoblanadi. Misol uchun, chiziqli faza xarakteristikali past chastotalar filtrlari uchun $r+1$ yoki $r+2$ ekstremumlar mavjud, bunda $r=(N+1)/2$ (1-tur filtrlar uchun) yoki $r=N/2$ (2-tur filtrlar uchun). 6.6b-rasmda ekstremumlar kichik aylanalar bilan belgilangan.

Filtr uchun texnik talablarda polosalar chegarasida joylashganlaridan boshqa ekstremal chastotalar avvaldan berilmaydi, ya'ni $f=f$ va $f=F/2$ chastotalardan boshqa chastotalardagi ekstremumlar noma'lum bo'ladi. Demak optimallash metodining asosiy vazifasi – ekstremal chastotalar joylashgan qiymatini aniqlashdan iborat. Bunday masalani yechishda Remez almashtirish algoritmiga asoslangan metoddan foydalanamiz (6.8-rasm).



6.8-rasm. Optimal metodning soddalashtirilgan funksional sxemasi

Ekstremum chastotalari joylashgan chastotalarini aniqlash natijasida haqiqiy chastotalar xarakteristikasini olish mumkin, demak uning impuls xarakteristikasini ham aniqlash mumkin. Filtrni loyihalash uchun berilgan texnik talablar (ya'ni o'tkazish polosasi chegaraviy qiymati N va filtr o'tkazish va o'tkazmaslik polosasidagi tebranishlar amplitudasi nisbati) uchun optimal metod quyidagi asosiy bosqichlarga ega:

- Remez almashtirish algoritmi metodidan foydalanib, ekstremal chastotalar optimal chastotalarini topish;
- ekstremumlar joylashgan chastotalardan foydalanib, chastotalar xarakteristikasini aniqlash;
- impuls xarakteristikalar koeffisientlarini olish.

Chastota tanlash usuli. Chastota tanlash usuli norekursiv filtrlar tarkibiga kiruvchi oddiy chastota tanlovchi filtrlar (past chastotalar filtri, yuqori chastotalar filtri va chastotalar polosasi filtrlari)ini va har qanday chastota xarakteristikali filtrlarni loyihalash (yaratish) imkoniyatini beradi. Chastota tanlash metodining o'ziga xos xususiyati shundan iboratki, u impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni rekursiv usulda hisoblashda samarali hisoblash usulidan foydalanish imkoniyatini beradi. Ba'zi hollarda impuls xarakteristikasi chekli, koeffisientlari butun son bo'lgan rekursiv filtrlarni hisoblash imkoniyatini beradi. Bu usuldan faqat oddiy arifmetik amallarni bajarishga asoslangan standart mikroprotsessorlardan foydalaniladigan tizimlar uchun qulay hisoblanadi.

Chastotalari tanlangan norekursiv filtrlar. Misol uchun, chastota xarakteristikasi 6.9*a*-rasmda keltirilgan impuls xarakteristikasi chekli filtr uchun koeffisientlarni aniqlash kerak bo'lsin. Dastlab chastotalar xarakteristikasi kF/n,

$k = 0, 1, ..., N-1$ nuqtalari uchun N ta chastotalarni tanlaymiz. Filtr koeffisientlari $h(n)$ ni tanlangan N ta chastotalar uchun Fure teskari diskret almashtirishini qo'llab aniqlash mumkin

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{i(2\pi/N)nk} \qquad (6.8)$$

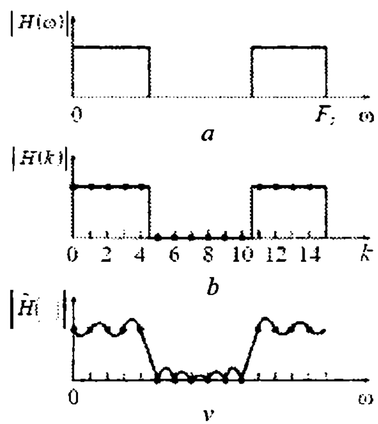
bunda $H(k)$, $k = 0, 1, ..., N-1$ – ideal va loyihalanishi maqsad qilib qo'yilgan filtr chastotalar xarakteristikasida tanlangan chastotalar (6.8) tenglikni quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| e^{-i2\pi\alpha k/N} e^{i2\pi nk/N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| e^{i2\pi(n-\alpha)k/N} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| \cos[2\pi(n-\alpha)/N] + i\sin[2\pi(n-\alpha)/N] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |H(k)| \cos[2\pi(n-\alpha)/N]. \qquad (6.9)$$

bunda $\alpha = (N-1)/2$, $N(k)$ – filtr chastotalar xarakteristikasida kF/n nuqtalardagi tanlovlar, $h(n)$ – to'liq haqiqiy funksiya.



6.9-rasm. Chastotalarni tanlash haqida tushuncha: *a*) past chastotalar ideal filtrining chastota xarakteristikasi; *b*) ideal past chastotalar filtrida chastotalar tanlash; *v*) *b* rasmda tanlangan nuqtalar uchun loyihalangan past chastotalar filtri chastotalar xarakteristikasi

Ko'pchilik muhim hollarda, faza xarakteristikasi chiziqli bo'lganda $h(n)$ simmetrik bo'ladi va uni quyidagicha ifodalash mumkin:

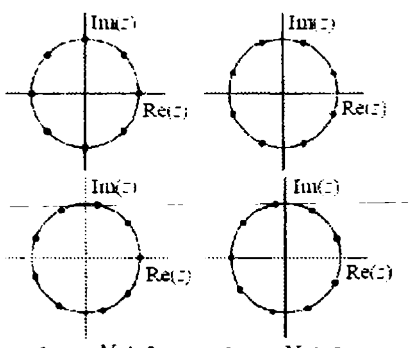
$$h(n) = \frac{1}{N}\left[\sum_{k=0}^{N/2-1} 2\left|H(k)\right|\cos\left[2\pi(n-\alpha)/N + H(0)\right]\right] \qquad (6.10)$$

Agar N toq bo'lsa, yig'indi yuqori chegarasi $(N-1)/2$ ga teng bo'ladi. Natijada olinadigan filtr chastotalar xarakteristikasi chastotalari tanlangan ideal chastota xarakteristikasiga to'liq mos keladi. Shuning bilan birga, xarakteristikada tanlangan nuqtalarda katta farq bo'lishi mumkin (6.9v-rasm). Loyihalanadigan filtr chastotalar xarakteristikasini approksimatsiyalash uchun yetarli sondagi chastotalarni tanlash kerak.

Chastota tanlashga asoslanib qurilgan, alternativ (2-tur filtr)ni olish uchun quyidagi nuqtalarda chastotalar tanlash kerak:

$$f_k = (k + 1/2)F_s / N, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (6.11)$$

6.10-rasmda chastotalar tanlash ikkita strukturaviy sxemasi taqqoslangan. Texnik talablar bir xil bo'lishiga qaramay bu ikki metod bir-biridan farqlanuvchi chastotalar xarakteristikalarini keltirib chiqaradi. Loyihalovchining vazifasi shu ikki filtrdan qaysi biri qo'yilgan masalani yechish uchun ko'proq mos kelishini aniqlashdan iborat.



6.10-rasm. Ikki tur filtrlar uchun chastota tanlashning bo'lishi mumkin bo'lgan to'rtta strukturasi (kompleks tekislikda tasvirlangan)

Tanlangan chastotalar rekursiv filtrlari. Agar tanlangan chastotalarning ko'pchilik qiymatlari nolga teng bo'lsa, u holda rekursiv shakldagi tanlangan chastota filtrlarini hisoblash norekursiv filtrlarni hisoblashga qaraganda sezilarli darajada qulay. Impuls xarakteristikasi chekli filtr uzatish koeffisienti $H(z)$ ni rekursiv ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}z^{-1}}=H_1(z)H_2(z), \qquad (6.12)$$

bunda

$$H_1(z)=\frac{1-z^{-N}}{N},$$

$$H_2(z)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j2\pi k/N}z^{-1}}.$$

Rekursiv shaklda $H(z)$ ni ikki kaskadli filtrlardan iborat deb qarash mumkin: birlik radiusli doira ichida bir tekis joylashgan N ta nollardan iborat taroqsimon filtr $H(z)$ va bir qutbli N ta $H(z)$ filtrlar yig'indisi sifatida. Taroqsimon filtr nollari va bir qutbli filtrlarning qutblari birlik radiusli aylanadi $z=e^{x}$ nuqtalarda bir-biriga mos keladi. Natijada nollar qutblar bilan o'zaro bir-birini kompensatsiyalaydi va $H(z)$ qutblarga ega bo'lmagani uchun u cheklangan impuls xarakteristikaga teng bo'ladi.

Amalda so'zlarning davomiyligi cheklangani uchun $H(z)$ ning qutblari birlik aylanada aniq joylashmasligi nollarni to'liq kompensatsiyalamaydi va $H(z)$ potensial – kafolatli barqaror bo'lmagan cheksiz impuls xarakteristikali filtrga aylanadi. Barqarorlik muammosini $H(z)$ ni radiusi o'lchami r bo'lgan birdan kichik aylanada diskretlash orqali birtaraf qilish mumkin. Bu holda uzatish koeffisienti quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$H(z)=\frac{1-r^{N}z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-re^{j2\pi k/N}z^{-1}}. \qquad (6.13)$$

Umuman olganda $H(k)$ ning tanlangan chastotalari – bu kompleks kattaliklar bo'lib, (6.12) yoki (6.13) tenglamalarni to'g'ridan-to'g'ri yechish kompleks sonlar arifmetikasidan foydalanishni talab qiladi. Ushbu murakkabliklarga duch kelmaslik uchun har qanday impuls xarakteristikasi chekli impuls xarakteristikasi $h(n)$ haqiqiy bo'lgan filtr chastotalar xarakteristikalariga xos bo'lgan simmetriyalik xossasidan foydalanamiz.

Oddiy faza xarakteristikasi chiziqli bo'lgan chastota tanlovchi impuls xarakteristikasi juft – simmetrik filtr uzatish koeffisienti quyidagicha ifodalanadi:

$$H(z)=\frac{1-r^{N}z^{-N}}{N}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{M}\frac{|H(k)|2\cos(2\pi k\alpha/N)-2r\cos[2\pi k(1-\alpha)/N]z^{-1}}{1-2r\cos(2\pi k/N)z^{-1}-r^{2}z^{-2}}+\frac{H(0)}{1-z^{-1}}\right], \quad (6.14)$$

bunda $\alpha=(N-1)/2$. N toq bo‘lganda $M=(N-1)/2$ va N juft bo‘lganda $M=N/2-1$.

Oddiy koeffisientli chastotasi tanlangan filtrlar. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni rekursiv loyihalash va amalga oshirishni raqamli filtrlarda amalga oshiriladigan arifmetik amallarni sezilarli darajada kamaytiradi. Shu bilan birga, agar filtr butun sonli koeffisientlarga ega bo‘lsa (shu jumladan ikkining darajalari ko‘rinishida), u holda uning hisoblash samaradorligi oshadi, bu ayniqsa arifmetik amallarni bajarishda oddiy protsessorlardan foydalanishda samarali hisoblanadi. Ammo butun son ko‘rinishidagi koeffisientlarni faqat uzatish koeffisientlarining qutblari ma’lum holatlarda joylashgan bo‘lishi kerak (6.14-tenglama). Ushbu ta’kidlashni quyidagicha ifodalash mumkin: butun sonli koeffisientlarga ega filtrlarni faqat ma’lum chastotalarda sozlash (simmetrik ko‘rinishdagi chastota xarakteristikalariga ega bo‘lish) mumkin. Shuni alohida ta’kidlash kerakki, filtr koeffisientlari butun sonlardan iborat bo‘lgani uchun qutblarni birlik radiusli aylanaga ideal holda joylashtirish mumkin. Ushbu yuqorida keltirilgan usulda yaratilgan filtrlar chastotasi tanlangan filtrlarni xususiy ko‘rinishlari hisoblanadi.

Nazorat savollari

1. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarni loyihalash bosqichlarini aytib bering.

2. Raqamli filtr faza xarakteristikasi chiziqli bo‘lishi qanday ta’minlanadi?

3. Chiziqli fazaviy xarakteristikali impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarning qanday turlari mavjud?

4. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarni loyihalash bosqichlarini aytib bering.

5. Past chastotalar raqamli filtrlar amplituda-chastota xarakteristikasi umumiy ko‘rinishini chizing va uning o‘ziga xos xususiyatlarini aytib bering.

6. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarni hisoblash usulini aytib bering.

7. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtr past chastotalar filtri optimal chastotalar xarakteristikasi qanday hisoblanadi?

8. Tanlangan chastotalar usulidan norekursiv filtrlarni loyihalashning afzalliklari nimalardan iborat?

7. IMPULS XARAKTERISTIKASI CHEKSIZ FILTRLARNI LOYIHALASH

7.1. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning xarakteristikalari

Impuls xarakteristikasi cheksiz raqamli filtrlar quyidagi rekursiv tenglama orqali xarakterlanadi:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{\infty}h(k)x(n-k)=\sum_{k=0}^{N}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{M}a_k y(n-k). \qquad (7.1)$$

bunda $h(k)$ – filtrning impuls xarakteristikasi bo'lib, nazariy nuqtai nazardan cheksiz katta davomiylikka ega, b va a – filtr koeffisientlari, $x(n)$ va $y(n)$ – filtr kirish va chiqish signallari.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrning uzatish funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\ldots+b_N z^{-N}}{1+a_1 z^{-1}+\ldots+a_M z^{-M}}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M}a_k z^{-k}}. \qquad (7.2)$$

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalashdagi muhim jarayonlardan biri bu b va a koeffisientlarini shunday qiymatlarini topishdan iboratki, natijada filtrning ma'lum xarakteristikalari, misol uchun chastota xarakteristikasi ma'lum ko'rinishga ega bo'lishi kerak. impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni ifodalovchi formulalar (7.1) va (7.2) lardan iborat.

(7.1) tenglamada filtrning ushbu ondagi chiqish signali $y(n)$ o'tgan chiqish signallari $y(n-k)$ va ushbu ondagi kirish signali $x(n)$ va uning avvalgi diskret qiymatlari $x(n-k)$, ya'ni impuls xarakteristikasi cheksiz filtr bu ma'lum ko'rinishdagi teskari bog'lanishli tizim. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrning afzalligi teskari aloqa natijasida erishiladigan moslashuvchanligi hisoblanadi. Misol uchun, impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalash, odatda bir xildagi texnik talablarni bajarish uchun impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarga qaraganda kam sonli koeffisientlarni talab qiladi, shuning uchun impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlardan chastota xarakteristikasining o'tkazish va o'tkazmaslik polosalari orasidagi o'tish polosasi kichik bo'lgan holatlarda, ya'ni chastota xarakteristikasi o'tish qismi qiyaligi keskin bo'lishi talab etilganda foydalaniladi. Natijada impuls xarakteristikasi cheksiz filtr potensial barqarorligining yomonlashishi va bundan tashqari loyihalashda maxsus chora ko'rilmasa filtrning ishlash tezligi kamayadi.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrning uzatish koeffisienti $H(z)$ ni ifodalovchi (7.2) formulani quyidagicha yoyish mumkin:

$$H(z)=\frac{K(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_N)}{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_M)}. \qquad (7.3)$$

bunda z, z,... – uzatish koeffisienti $H(z)$ nolllari, ya'ni $H(z)$ nolga teng bo'lishini ta'minlovchi z ning qiymatlari, p, p,... – $H(z)$ ning qutblari, ya'ni z ning $H(z)$ cheksizlikka teng bo'ladigan qiymatlari.

Uzatish koeffisienti funksiyasi qutb va nollarining joylashishi grafigi nol va qutblarning diagrammasi deb ataladi va filtrni kompleks yassi yuzada tasvirlash va tahlil uchun qulay vosita hisoblanadi. Filtr barqaror bo'lishi uchun hamma qutblar birlik radiusli doira ichida (yoki nollar bilan mos birlik radius aylanasida) joylashgan bo'lishi kerak. Nollarning joylashish holatiga cheklanishlar yo'q.

7.2. Impuls xarakteristikasi cheksiz raqamli filtrlarni loyihalash bosqichlari

Umuman olganda impuls xarakteristikasi cheksiz raqamli filtrlarni loyihalash bosqichlari impuls xarakteristikasi chekli raqamli filtrlarni loyihalash bosqichlaridan kam farqlanadi. Ammo uni loyihalashning o'ziga xos xususiyatlari bo'lib, biz ularni kelgusida ko'rib chiqamiz.

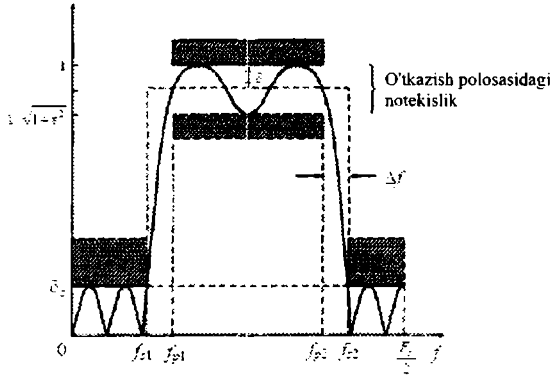
7.2.1. Impuls xarakteristikasi cheksiz raqamli filtrlarning tezkorligiga bo'lgan texnik talablar

Boshqa ko'pgina texnologik masalalarga o'xshash impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalash uning tezkorligiga qo'yiladigan talablar ro'yxatini tuzishdan boshlanadi. Talablar ro'yxatida quyidagilar keltirilishi kerak:

Chastota tanlovchi filtrlar qatoriga kiruvchi past chastotalar filtri va polosa filtrlari uchun chastota xarakteristikalari dopusk chizmasi ko'rinishida beriladi. Misol tariqasida 7.1-rasmda impuls xarakteristikasi cheksiz polosa filtri uchun dopusklar chizmasi keltirilgan.

Impuls xarakteristikasining shtrixlangan qismlari dopusklarni belgilaydi. Chastota xarakteristikasini baholashda odatda quyidagi parametrlardan foydalaniladi:

ε – o'tkazish polosasidagi notekisliklarni baholovchi parametr; δ_p – o'tkazish polosasidagi og'ish amplitudasi; δ – o'tkazmaslik polosasidagi og'ish amplitudasi; f va f o'tkazish polosasi chegaraviy chastotalari; f va f o'tkazmaslik polosasi chegaraviy chastotalari.



7.1-rasm. Impuls xarakteristikasi cheksiz polosa filtri uchun dopusklar grafigi

Chegaraviy chastotalarning normallashgan qiymati keltiriladi, ya'ni diskretlash chastotasi ulushi sifatida (f/F), ammo ba'zan oddiy chastota qiymatida Gers yoki kilogerslarda ham keltiriladi. O'tkazish va o'tkazmaslik polosalarida amplituda og'ishini oddiy kattalik yoki desibellar orqali ifodalangan ko'rinishda ifodalash mumkin: og'ishlar (notekisliklar) amplitudasi o'tkazish polosasida desibellarda quyidagicha baholanadi:

$$A_p = 10\lg(1+\varepsilon^2) = -20\cdot\lg(1-\delta_p)\,, \qquad (7.4a)$$

va o'tkazmaslik polosasida og'ishlar amplitudasi desibellarda quyidagicha baholanadi:

$$A_s = -20\cdot\lg(\delta_s)\,. \qquad (7.4б$$

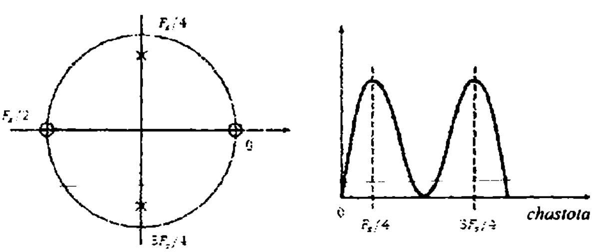
Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun og'ish (notekislik) – bu o'tkazish polosasidagi maksimal va minimal og'ishlar qiymatining farqi.

7.2.2. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar koeffisientlarini hisoblash usuli

Bu bosqichda kelgusida a va b koeffisientlari qiymatlarini (7.2) tenglama asosida hisoblashni ta'minlaydigan approksimatsiyalash metodi tanlanadi, koeffisientlarning hisoblash natijasida olingan qiymatlari loyihalash birinchi bosqichida filtr amplituda-chastota xarakteristikasi uchun olingan talablarni qoniqtirishi kerak.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtr koeffisientlari qiymatlarini oddiy ravishda olish uchun uning qutb va nollarini kompleks yuzada joylashtirish natijasida filtrdan talab etiladigan amplituda-chastota xarakteristikasini olish mumkin. Ushbu qutb va nollarni joylashtirish orqali filtr koeffisientlarini aniqlash metodi, faqat oddiy filtrlarni loyihalashda qo'llanilishi mumkin, misol uchun tor polosali o'tkazish polosasidagi notekisliklariga bo'lgan talablar nisbatan aniq berilmagan rejektor filtrlarni loyihalashda foydalanish qulay hisoblanadi. Nisbatan samarali metod, bu dastlab texnik talablarga javob beradigan analog filtrni loyihalash, so'ngra uni ekvivalent raqamli filtrga almashtirish hisoblanadi. Ko'pgina impuls xarakteristikasi cheksiz raqamli filtrlar shu metod asosida yaratiladi. Ushbu metoddan keng foydalanilishiga sabab, hozirda analog filtrlarni loyihalash haqida yetarli darajada manba va ma'lumotlar mavjud bo'lib, ulardan raqamli filtrlarni loyihalashda foydalanish mumkin. Analog filtrlarni ularga mos keluvchi raqamli filtrlarga almashtirishda quyidagi uch metoddan foydalanish mumkin: impuls xarakteristikani invariant almashtirish; moslashgan z-almashtirish va bichiziqli (ikki chiziqli) z-almashtirish.

Filtr koeffisientlarini nol va qutblarni joylashtirish usuli bilan hisoblash. Agar qandaydir kompleks yuzaga nolni joylashtirsak, u holda ushbu nuqtada chastota xarakteristikasi qiymati nolga teng bo'ladi. Shu bilan qutb filtr chastota xarakteristikasida maksimum paydo bo'lishiga sabab bo'ladi (7.2-rasm). Birlik radiusli aylanaga yaqin joylashgan qutblar, amplituda-chastota xarakteristikasida katta cho'qqilar paydo bo'lishiga sabab bo'ladi va shu bilan birga birlik radiusli aylanaga yaqin joylashgan yoki ustiga tushgan nollar amplituda-chastota xarakteristikada minimumlar paydo bo'lishiga olib keladi. Shunday qilib nol va qutblarning kompleks yuzada joylashtirish natijasida oddiy past chastotalar filtrini yoki boshqa chastota tanlovchi filtrni olish mumkin.



a *b*

7.2-rasm. Oddiy filtrning nol va qutblari diagrammasi (*a*); ushbu filtr chastota xarakteristikasining sxematik tasviri (*b*)

Raqamli filtrlarni loyihalashda quyidagi muhim holatga alohida ahamiyat berish kerak: filtr koeffisientlari haqiqiy bo'lishi uchun qutb va nollar haqiqiy bo'lishlari yoki o'zaro kompleks moslashgan bo'lishi kerak.

Filtr koeffisientlari impuls xarakteristikasini invariant almashtirish usuli bilan hisoblash. Bu usul raqamli filtr impuls xarakteristikasi $h(t)$ ni mos analog filtr uzatish funksiyasi $H(s)$ dan Laplas almashtirishi yordamida olishga asoslangan. So'ngra impuls xarakteristika $h(t)$ ni diskretizatsiyalash natijasida olingan $h(nT)$ funksiya ustidan z almashtirishi bajariladi va natijada biz izlayotgan uzatish funksiyasi $H(z)$ olinadi (T – diskretlash oralig'i). Agar analog filtr uzatish funksiyasi quyidagi funksiya orqali ifodalangan bo'lsa

$$H(s)=\frac{C}{s-p}. \tag{7.5}$$

bunda p – $H(s)$ funksiya qutbi, C – doimiy, o'zgarmas kattalik (konstanta).

Bu holda impuls xarakteristikasi $h(t)$ Laplas teskari almashtirishi orqali quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=L^{-1}\left(\frac{C}{s-p}\right)=Ce^{pt}$$

bunda L^{-} Laplas teskari almashtirishini anglatadi. Impuls xarakteristikasini invariant almashtirish metodi asosida ekvivalent raqamli filtr impuls xarakteristikasi $h(nT)$ analog filtr impuls xarakteristikasi $h(t)$ ning diskret vaqtlar $t=nT$ dagi qiymatlari yig'indisiga teng ($n=0,1,2,...,$), ya'ni

$$h(nt)=h(t)\big|_{t=nT}=Ce^{pnT}.$$

$H(z)$ uzatish koeffisienti z almashtirishni $h(nT)$ ga ta'siri natijasi sifatida aniqlanadi:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h(nT)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}ce^{pnT}z^{-1}=\frac{c}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

Demak, yuqorida keltirilgan natijadan foydalanib quyidagini yozish mumkin:

$$\frac{C}{s-p}\rightarrow\frac{C}{1-e^{pT}z^{-1}} \tag{7.6}$$

Impuls xarakteristikasi cheklanmagan yuqori (misol uchun M-chi) tartibli oddiy qutbli filtrlarga impuls xarakteristikasini invariant metodini qo'llashda, dastlab filtr uzatish funksiyasi $H(s)$ ni oddiy kasr sonlarga yoyish kerak (bunday yoyish yagona qutbli oddiy filtrlar ketma-ketligini anglatadi):

$$H(s)=\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{C_M}{s-p_M}=\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{s-p_k}. \tag{7.7}$$

bunda p – $H(s)$ funksiyaning qutbi. (7.7) tenglamaning o'ng tomonidagi har bir tashkil etuvchisi (7.6) formula ko'rinishida bo'lib, natijaviy filtr $H(s)$ funksiyasi har bir alohida filtrlar xususiy funksiyalari yig'indisiga teng. Demak

$$\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{s-p_k}\to\sum_{k=1}^{M}\frac{C_k}{1-e^{p_kT}z^{-1}}. \qquad (7.8)$$

Yuqori tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar odatda ketma-ket kaskadlar yoki parallel kaskadlar ko'rinishidagi ikkinchi tartibli filtrlar shaklida amalga oshiriladi. Ko'p hollarda $M=2$ – ikkinchi tartibli filtrlardan foydalaniladi. $M=2$ bo'lgan holat uchun (7.8) almashtirish quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{C_1}{s-p_1}+\frac{C_2}{s-p_2}\to\frac{C_1}{1-e^{p_1T}z^{-1}}+\frac{C_2}{1-e^{p_2T}z^{-1}}=$$

$$=\frac{C_1+C_2-(C_1e^{p_2T}+C_2e^{p_1T})z^{-1}}{1-(e^{p_1T}-e^{p_2T})z^{-1}+e^{(p_1-p_2)T}z^{-2}}. \qquad (7.9)$$

Agar p va p qutblar kompleks moslashgan bo'lsa, u holda C va C lar ham kompleks moslashgan bo'ladi va (7.9) tenglama quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{C_1}{1-e^{p_1T}z^{-1}}+\frac{C_1^*}{1-e^{p_1^*T}z^{-1}}=$$

$$=\frac{2C_{re}-[C_{re}\cos(p_{im}T)+C_{im}\sin(p_{im}T)]2e^{p_{re}T}z^{-1}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{2p_{re}T}z^{-2}}, \qquad (7.10)$$

bunda C va C lar C ning haqiqiy va mavhum qismi, p va p lar p ning haqiqiy va mavhum qismi, "*" – kompleks moslashganlikni anglatuvchi belgi.

Ko'pchilik impuls xarakteristikasi invariant almashtirish sxemasi asosida amalga oshirish bo'lgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning uzatish koeffisientilarini hisoblash uchun (7.6), (7.9) va (7.10) almashtirishlarini bajarish yetarli hisoblanadi. Ushbu bobga ilova shaklida filtr koeffisientlarini yuqorida keltirilgan tartibda S tilida dasturi keltirilgan bo'lib, quyidagi keltirilgan misol ushbu asosiy metodni tasdiqlaydi.

Shunday qilib, invariant almashtirish metodidan foydalanish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo'ladi:

1. Raqamli filtrdan talab etiladigan texnik ko'rsatkichlarga javob beradigan analog filtr normallashtirilgan chastota xarakteristikasini aniqlash.

2. So'nggi bosqichda bajariladigan amallarni osonlashtirish uchun $H(s)$ ni elementar kasrlar yig'indisiga yoyish.

3. Har bir kasrga z-almashtirishni qo'llab (7.8) ga o'xshash ifodani olish.

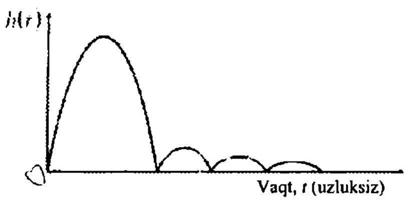
4. 3-bandni tashkil etuvchilarini ikkinchi tartibli tashkil etuvchi hadlar guruhi ko'rinishiga keltirib (yoki birinchi tartibli) $H(z)$ ni aniqlash. Agar real diskretlash chastotasidan foydalanilgan bo'lsa, u holda $H(z)$ ni T ga ko'paytirish kerak bo'ladi.

Impuls xarakteristikasini invariant almashtirish metodi bir qator xususiyatlarga ega:

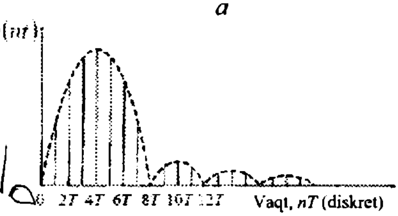
1. Raqamli filtr impuls xarakteristikasi $h(nT)$ analog filtr impuls xarakteristikasi $h(t)$ ning diskret vaqt $t = nT$, $n = 0, 1, ...$ lardagi qiymatlariga invariant (mos) keladi (7.3-rasm). Shuning uchun bu metodni impuls xarakteristikasini invariant almashtirish metodi deb ataladi.

2. Impuls xarakteristikani invariant almashtirish sxemasi asosida loyihalangan raqamli filtrning chastota xarakteristikasiga diskretlash chastotasi ta'sir qiladi. Loyihalashtirilayotgan raqamli filtr chastota xarakteristikasi analog filtr chastota xarakteristikasiga yaqin (o'xshash) blishi uchun yetarli darajada katta diskretlash chastotasi talab qilinadi.

3. Vaqt bo'yicha diskretlangan tizimlarga o'xshash $H(z)$ ga mos impuls xarakteristikasi invariant almashtirilgan raqamli filtr (o'tkazish polosasi) spektri ham birlamchi analog filtr spektri (o'tkazish polosasi) $H(s)$ ga o'xshash diskretlash chastotasiga teng ravishda davriy takrorlanadi va spektrning bir-birini ustiga tushishiga sabab bo'ladi (7.4-rasm). Shu bilan birga birlamchi analog filtr chastota xarakteristikasining old va orqa kesimlari yetarli darajada tik bo'lsa yoki analog filtr chastota o'tkazish polosasi impuls xarakteristikasini invariant almashtirishdan avval chegaralangan bo'lsa, u holda spektrlarning bir-biri ustiga tushishi kichik (sezilarsiz) bo'ladi.



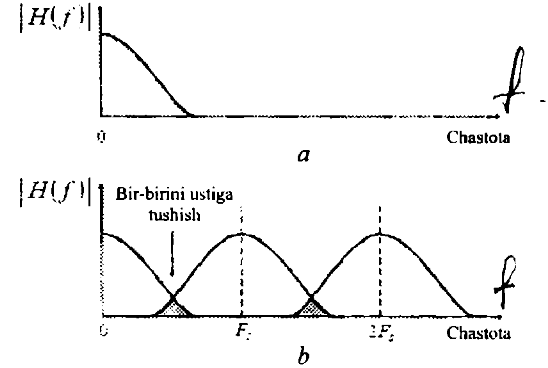
a



b

7.3-rasm. Analog filtr impuls xarakteristikasi $h(t)$ (*a*) va unga ekvivalent raqamli filtr $h(nT)$ (*b*) impuls xarakteristikasini taqqoslash

Diskretlash chastotasini kattalashtirish orqali ham yuqoridagi natijani, spektr bir-biri ustiga tushishini keskin kamaytirish mumkin. Shunday qilib, yuqoridagilar asosida bu metoddan chegaralash qiyaligi yetarli darajada tik bo‘lgan past chastotalar filtrini yaratishda diskretlash chastotasini katta tanlash asosida spektrlar bir-birining ustiga deyarli tushmaydigan hollarda foydalanish tavsiya etiladi. Bu metoddan yuqori chastotalar va rejektor filtrlarni loyihalashda foydalanish uchun spektrlar bir-birining ustiga tushmasligini ta’minlovchi himoyalovchi filtrdan foydalanish kerak bo‘ladi.



7.4-rasm. Analog filtr amplituda-chastota xarakteristikasi (spektri) (a); impuls xarakteristikasini invariant almashtirish metodi orqali olingan ekvivalent raqamli filtr amplituda-chastota xarakteristikasi (spektri) (b), bunda bir-birini ustiga tushish holati shtrixlangan

Moslashgan z-almashtirish yordamida filtr koeffisientlarini hisoblash. Moslashgan z-almashtirish analog filtrni raqamli filtrga almashtirish imkoniyatini yaratadi. Bu metodda analog filtrning har bir qutb va nollari s yuzadan z yuzaga ~~(kompleks yuzaga) o‘tkaziladi~~:

$$(s-a)\rightarrow(1-z^{-1}e^{aT}). \qquad (7.11)$$

bunda T – diskretlash davri. (7.11) almashtirish $s=a$ nuqtada joylashgan qutb (yoki nol)ni kompleks yuzadagi $z=e$ nuqtasida joylashgan qutb (yoki nol)ga o‘tkazishni tasvirlaydi.

Yuqori tartibli analog filtr uzatish koeffisienti bir necha qutb va (yoki) nollarga ega bo‘lib, ularni s yuzadan z yuzaga o‘tkazib tasvirlash talab etiladi. Eng yuqori darajali turli qutb va nollarga ega analog filtr uzatish koeffisientini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}. \tag{7.12}$$

bunda z va p – uzatish koeffisienti $H(s)$ ning nol va qutblari.

Endi (7.12) tenglama har bir tashkil etuvchisiga moslashgan z-almashtirish bilan ta'sir etamiz:

$$(s-z_k)\rightarrow(1-z^{-1}e^{z_kT}),$$

$$(s-p_k)\rightarrow(1-z^{-1}e^{p_kT}).$$

Impuls xarakteristikasi cheksiz yuqori tartibli filtrlarda asosiy filtrlovchi tashkil etuvchi blok bu ikkinchi tartibli blok hisoblanadi. Shuning uchun (7.12) tenglamada bizni $M=N=2$ bo'lgan holat alohida qiziqtiradi. Bu holat uchun analog filtr uzatish koeffisienti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} \tag{7.13}$$

Ushbu funksiyaga moslashgan z-almashtirishini qo'llab quyidagi ifodani olamiz:

$$\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}\rightarrow\frac{1-(e^{z_1T}+e^{z_2T})z^{-1}+e^{(z_1+z_2)T}z^{-2}}{1-(e^{p_1T}+e^{p_2T})z^{-1}+e^{(p_1+p_2)T}z^{-2}} \tag{7.14}$$

Agar ikkinchi tartibli zveno nol va qutblari kompleks moslashgan juftliklarni shakllantirsa, u holda $p = p$ va $z = z$ va (7.14) tenglamaning o'ng tomoni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{1-2e^{z_{re}T}\cos(z_{im}T)z^{-1}+e^{z_{re}T}z^{-2}}{1-2e^{p_{re}T}\cos(p_{im}T)z^{-1}+e^{p_{re}T}z^{-2}} \tag{7.15}$$

bunda z va z ; p va p lar mos ravishda z va p larning haqiqiy va mavhum qismlari.

Amalda ikkinchi tartibli analog filtrlash bloklarini bizlarga tanish bo'lgan rasional kasr shaklida ifodalash qulay, ya'ni

$$H(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}=\frac{A_0+A_1s+A_2s^2}{B_0+B_1s+B_2s^2}.$$

Bu holat uchun uzatish koeffisienti $H(s)$ ning qutb va nollari quyidagi ifodalar orqali aniqlanadi:

$$p_{1,2} = -\frac{B_1}{2B_2} \pm \left[\left(\frac{B_1}{2B_2} \right)^2 - \frac{B_0}{B_2} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.16a)$$

$$z_{1,2} = -\frac{A_1}{2A_2} \pm \left[\left(\frac{A_1}{2A_2} \right)^2 - \frac{A_0}{A_2} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7.16b)$$

Amalda (7.16a) va (7.16b) analog filtr uzatish funksiyalari orqali to‘g‘ridan-to‘g‘ri nol va qutblari joylashgan nuqtalar (demak, ularning haqiqiy va mavhum qismlari)ni aniqlash mumkin bo‘ladi. $H(s)$ ning qutb va nollarining haqiqiy va mavhum qismlarini aniqlash asosida (7.14) yoki (7.15) tenglamalar orqali analog filtrga mos raqamli filtrning uzatish koeffisienti $H(z)$ ni hisoblash mumkin.

Shunday qilib, moslashgan z-almashtirish metodidan foydalanish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak:

1. Loyihalanishi talab etilayotgan raqamli filtr ko‘rsatkichlariga mos keluvchi analog filtr uzatish funksiyasi $H(s)$ ni aniqlash.

2. $H(s)$ ning qutb va nollari o‘mini topish.

3. (7.11) formuladan foydalanib qutb va nollarni s yuzadan z yuzaga aks ettirish. Ikkinchi darajali bloklar uchun (7.14) va (7.15) formulalardan foydalanish mumkin.

4. z yuzada yozilgan tenglamani $H(z)$ uzatish koeffisientini olish uchun birlashtirish.

Moslashgan z-almashtirish metodi bir qator xususiyatlarga ega:

1. Moslashgan z-almashtirish metodi analog filtr uzatish koeffisientlarining nol va qutblarining joylashish nuqtalarini bilishni talab qiladi. Bu haqidagi ma’lumotlarni olish uchun analog uzatish funksiyasi $H(s)$ ni ko‘payuvchilarga yoyish mumkin.

2. Moslashgan z-almashtirish va impuls xarakteristikalarni invariant almashtirish metodlari aynan bir xil maxrajli raqamli filtrlarni beradi.

3. Raqamli filtrlarda foydali chastotalar o‘tkazish polosasi nol va Naykvist chastotasi (diskretlash chastotasining yarmi) orasida joylashgan bo‘ladi, analog filtrlarda esa noldan cheksizlikkacha bo‘lgan chastotalar orasida bo‘ladi. Natijada moslashgan z-almashtirish aks ta’siri analog filtr cheksiz o‘tkazish polosalar chastotasini chekli chastotalar polosasigacha toraytiradi. Bu ekvivalent raqamli filtrlar chastota xarakteristikasini analog filtr chastota xarakteristikasiga nisbatan farqlanishiga – buzilishiga sabab bo‘ladi. Moslashgan z-almashtirishga asoslangan filtrlar analog filtrlarga qaraganda katta uzatish koeffisientiga ega.

4. Agar analog filtr Naykvist chastotasiga yaqin chastotalarda qutblarga ega bo‘lsa yoki Naykvist chastotasidan katta chastotalarda nollarga ega bo‘lsa, u holda hosil bo‘ladigan raqamli filtr chastota xarakteristikasi ust-ustiga tushish hodisasi natijasida buzilgan bo‘ladi. Bunday holatlarda yuzaga keladigan analog filtr

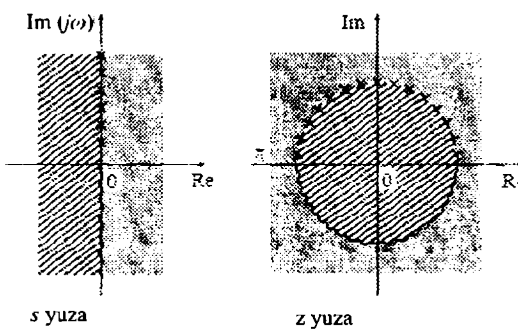
chastota xarakteristikasining Naykvist chastotasidan yuqori qismi sezilarli darajada bo'ladi. Chastota xarakteristikasining bu qismini kerakli, o'tkazish polosasiga o'tkazish uchun nooshkor diskretlash jarayonidan foydalaniladi.

5. Moslashgan z-almashtirish ham bir qutbli filtrlarni raqamliga almashtirish uchun yaroqsiz, chunki u Naykvist chastotasidan tashqarida nollarga ega emas. Bu holatni $z = -1$ (ya'ni Naykvist chastotasida) nuqtasida nollarni qo'shish bilan biroz yaxshilash mumkin.

Bichiziqli (ikki chiziqli) z-almashtirish yordamida filtr koeffisientlarini hisoblash usuli. Ushbu usul $H(s)$ analog filtr xarakteristikasini unga ekvivalent (teng kuchli) raqamli filtr xarakteristikasiga quyidagi almashtirishni amalga oshiradi:

$$s = k\frac{z-1}{z+1}, \quad k = 1 \text{ yoki } k = 2/T \tag{7.17}$$

Yuqorida keltirilgan almashtirish s yuzada ifodalangan $H(s)$ analog uzatish funksiyasini 7.5-rasmda ko'rsatilgandek kompleks yuzadagi uzatish funksiyasi $H(z)$ shaklida aks ettiradi. Shunga alohida e'tibor berish kerakki, 7.5-rasmda $j\omega$ o'qi s yuzasida birlik radiusga ega aylanada aks ettiriladi, s yuzaning chap yarmi birlik radiusli aylana ichida aks ettiriladi, o'ng yarmi esa birlik aylana tashqarisida aks ettiriladi.



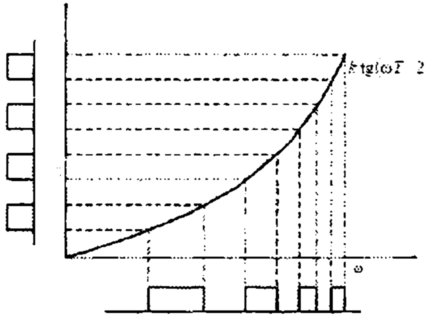
7.5-rasm. Bichiziqli z-almashtirishdan foydalanib s yuzani kompleks z yuzada aks ettirishga oid rasm

Shunday qilib, s yuza chap yarmidagi qutbli barqaror analog filtr birlik radiusli aylana ichidagi raqamli filtrga aylanadi.

Shunga alohida e'tibor berish kerakki, bir xil oraliqda joylashgan qutblar yuqori chastotalarda almashtirilgandan so'ng siqiladi va zichroq joylashadi. Afsuski, s ni to'g'ridan-to'g'ri $H(s)$ ga almashtirish, ya'ni (7.17) formulada ifodalangandek kerakligidan katta farqlanuvchi raqamli filtrni hosil bo'lishiga sabab bo'ladi. Buni (7.17) tenglamadagi $z = e^{sT}$ va $s = j\omega'$ larni o'zaro almashtirish orqali ko'rsatish mumkin. Soddalashtirish natijasida analog chastota ω' va raqamli chastota ω bir-biri bilan quyidagicha bog'liqligini topamiz:

$$\omega' = k tg\left(\frac{\omega T}{2}\right), \; k = 1 \text{ yoki } k = 2/T. \qquad (7.18)$$

(7.18) bog'liqlik 7.6-rasmda aks ettirilgan. Bundan ko'rinadiki, analog chastota ω' raqamli chastota ω bilan chastota ω ning kichik qiymatlarida deyarli chiziqli bog'liqlikka ega, ammo ω ning katta qiymatlarida bu bog'liqlik nochiziqli bo'ladi, bu natijada raqamli filtr chastota xarakteristikasining buzilishiga (deformatsiyalanishiga) olib keladi.



7.6-rasm. Deformatsiyalashni tasvirlovchi, analog va raqamli chastotalar orasidagi bog'liqlik

Analog filtr o'tkazish polosasi chap tomoni o'zgarmas kenglikka ega bo'ladi va uning markazi bir xil oraliqlarda joylashgan bo'ladi, raqamli filtrning o'tkazish polosasi esa biroz zichlashgan bo'ladi. Bu holatni yo'qotish uchun bichiziqli almashtirishni qo'llashdan avval analog filtr bir yoki bir necha kritik chastotalarda deformatsiyalanadi. Misol uchun past chastotalar filtrini loyihalashda chegaraviy (kesish) chastotasi dastlab denormallashtirish (deformatsiya)

$$\omega'_p = k\,tg\left(\frac{\omega_p T}{2}\right) \qquad (7.19)$$

bunda ω – berilgan chegaraviy (kesish) chastotasi;

ω' – dastlab deformatsiyalangan chegaraviy (kesish) chastotasi;

$k = 1$ yoki $k = 2/T$; T – diskretlash davri.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun bichiziqli z-almashtirishdan foydalanish bosqichlarini quyidagicha umumlashtirish mumkin:

1. Raqamli filtrga qo'yilgan texnik talablar asosida uzatish koeffisienti $H(s)$ bo'lgan mos analog filtrni aniqlash kerak.

2. Kerakli filtr uchun chegara (kesish) chastotasini topish va deformatsiyalash kerak. Past va yuqori chastota filtrlari uchun yagona chegara (kesish) chastotasi ω mavjud. Polosa va rejektor filtrlar o'tkazish polosalari ω va ω ikkita chegara (kesish) chastotalariga ega bo'lib, ularning har birini deformatsiyalash kerak bo'ladi (xuddi shuningdek o'tkazmaslik polosasining chegara chastotalari ham berilgan bo'lishi mumkin):

$$\omega'_g = tg\left(\frac{\omega_g T}{2}\right); \qquad (7.20a)$$

$$\omega'_{p1} = tg\left(\frac{\omega_{p1} T}{2}\right); \quad \omega'_{p2} = tg\left(\frac{\omega_{p2} T}{2}\right). \qquad (7.20б)$$

3. Mos analog filtr uzatish koeffisientidagi s ni loyihalanayotgan filtr turiga qarab quyidagi almashtirishlarning biridan foydalanib boshqasi bilan almashtirish orqali deformatsiyalash kerak:

$s = \dfrac{s}{\omega'}$ past chastotani past chastotaga, (7.21a)

$s = \dfrac{\omega'}{s}$ past chastotani yuqori chastotaga, (7.21b)

$s = \dfrac{s \; + \omega}{W}$ past chastotani polosa chastotasiga, (7.21v)

$s = \dfrac{W}{s \; + \omega}$ past chastotani rejektorlash chastotasiga, (7.21g)

bunda $\omega_0^2 = \omega'_{p2}\omega'_{p1}$, $W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}$.

4. Bichiziqli z-almashtirish metodini qo'llab, kerakli raqamli filtr uzatish funksiyasi $H(z)$ ni olish uchun denormallashtirilgan uzatish funksiyasi $H'(s)$ dagi s ni quyidagi qiymati bilan almashtirish olinadi:

$$s = \frac{z-1}{z+1}.$$

Nazorat savollari

1. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtr asosiy xarakteristikalarini tushuntiring.

2. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalash bosqichlari nimalardan iborat?

3. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtr AChXsini chizing va uning asosiy ko'rsatkichlarini aytib bering.

4. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalashning qanday usullarini bilasiz?

8. SIGNALLARGA TURLI TEZLIKLARDA RAQAMLI ISHLOV BERISH

Raqamli filtrlarga zamon talablarining oshib borishi turli diskretlash chastotasili signallarga raqamli ishlov berish imkoniyatiga ega bo'lgan, turli tezlikdagi diskret signallarga raqamli ishlov beruvchi filtrlarni yaratishni taqazo etadi. Diskret signallarga bunday ishlov berishda quyidagi ikki amaldan foydalaniladi: turli uzatish tezliklarini samarali navbatma-navbat amalga oshirishni ta'minlovchi desimatsiyalash va interpolyatsiyalash amallari. Desimatsiyalash signaldagi axborotni saqlagan holda uni siqish hisobiga diskretlash chastotasini kichiklashtiradi. Interpolyatsiyalash natijasida esa teskari diskretlash chastotasi kattalashtiriladi.

Audio signallarga ishlov berish sohasida bir necha tezliklarda ishlov berish uni saqlashga kerakli xotiralash qurilmasi hajmi kichik bo'lishini yoki uzatish tezligini kichiklashtirishni ta'minlaydi. Audio signallarga raqamli ishlov berishda foydalaniladigan nisbatan arzon yuqori aniqlikda analog-raqam o'zgartirishni ta'minlash odatdagi ketma-ket yaqinlashish metodi o'miga diskretlash natijasida olinadigan qiymatlarni zahirali metodidan foydalanishga o'tishni talab qildi.

Turli tezliklarda signallarga ishlov berish, signallarga raqamli ishlov berish funksiyasini samarali amalga oshirishni ta'minlaydi. Misol uchun impuls xarakteristikasi chekli tor polosali raqamli filtrlashni odatdagi SRIBdan foydalanib amalga oshirish bir necha e'tiborga loyiq muammolarni keltirib chiqaradi, chunki bunday filtrlar ularning chastota xarakteristikalariga qo'yilgan jiddiy talablarni bajarish uchun juda ko'p koeffisientlarini hisoblashni talab qiladi.

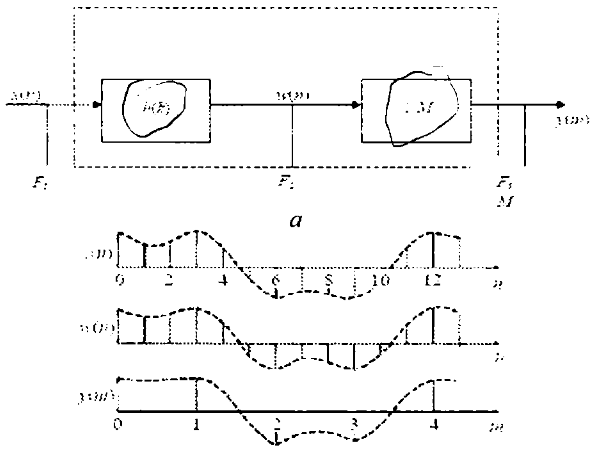
Turli tezliklarda signallarga ishlov berish metodi uni juda katta samara bilan amalga oshirishi natijasida ancha kichik tezliklarda filtrlashni, natijada filtr tartibini anchagina pasaytiradi.

8.1. Signallarga turli tezliklarda ishlov berish asoslari

Raqamli signal diskretlash chastotasini kamaytirishning eng oddiy, oson ~~usuli – bu uni dastlabki analog ko'rinishiga qaytarish va qaytadan boshqa~~ chastotada diskretizatsiyalash. Ammo raqam-analog o'zgartirish jarayoni quyidagi kamchiliklarga ega: kvantlash va yig'ishda hosil bo'ladigan xatoliklar, signal shaklining sezilarli darajada buzilishiga sabab bo'ladi. Shuning uchun agar signal raqamli ko'rinishda berilgan bo'lsa, unga raqamli metod asosida ishlov bergan ma'qul. Turli tezliklarda raqamli ishlov berish bu signal diskretlash chastotasini raqamli metod asosida samarali o'zgartirish bo'lib, bunda signallarga raqamli ishlov berishning an'anaviy metodlaridan foydalaniladi. Misol uchun, signal spektrlarining bir-birining ustiga tushishi va aks chastota ta'sirini kamaytirish uchun SRIBni real vaqtda raqamli shaklda amalga oshirish mumkin, natijada filtrlar amplituda-chastota xarakteristikalari qiyaliklari keskin oshadi va faza xarakteristikasi chiziqli bo'lishiga erishiladi.

8.2. Diskretlash chastotasini kichiklashtirish: butun qadamli desimatsiya

8.1*a*-rasmda $x(n)$ signalni butun qadam M lar orqali desimatsiyalash blok-sxemasi keltirilgan. Bu rasmda $h(k)$ spektrlarini ust-ustiga tushishdan himoyalovchi va diskretlash chastotasini siqish (kompressiyalash)ni amalga oshiruvchi raqamli filtr strukturaviy sxemasi keltirilgan. Bunda M diskretlash koeffisienti bo‘lib, u birlamchi diskretlash chastotasi F ni F/M gacha kamaytiradi.



8.1-rasm. *a*) desimatsiyalash qurilmasi blok-sxemasi, *b*) $M=3$ bilan desimatsiyalash vaqt diagrammalari

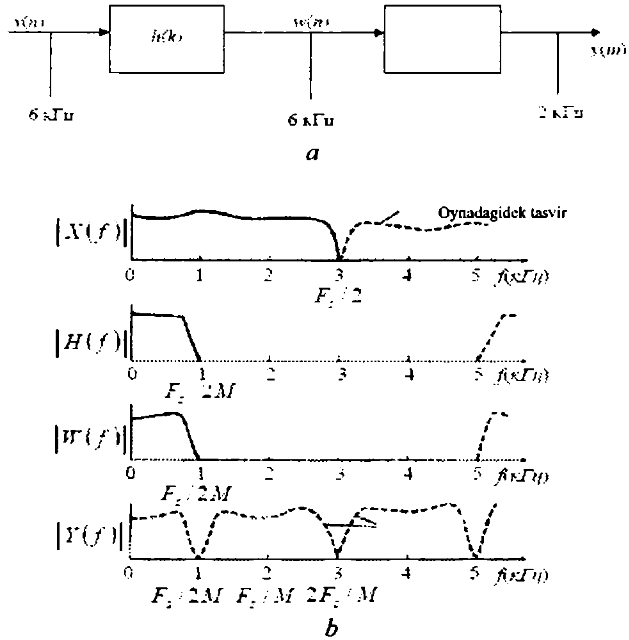
Nisbatan past diskretlash chastotasida spektrlarning ust-ustiga tushmasligini ta’minlash uchun analog signal diskretlashdan avval o‘tkazish polosasi $F/2M$ bo‘lgan filtrdan o‘tkaziladi. Diskretlash chastotasini kamaytirish har bir M ta oniy qiymatdan $M-1$ tasi e’tiborga olinmaydi. Desimatsiyalash qurilmasi chiqish va kirish signallari bir-biri bilan quyidagicha bog‘lanishga ega:

$$y(m)=\omega(mM)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(mM-k), \qquad (8.1a)$$

bunda
$$\omega(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \qquad (8.1б)$$

8.1*b*-rasmda $M=3$ bo‘lgan, ya’ni $x(n)$ ning har uchta oniy qiymatidan ikkitasi e’tiborga olinmagan oddiy holat tasvirlangan. Desimatsiyalash bu amalda ma’lumotlarni siqish jarayoni hisoblanadi.

8.2-rasmda kirishiga keng polosali signal $x(n)$ berilgan holat uchun desimatsiyalash jarayonini spektral ko'rinishda ifodalash keltirilgan.

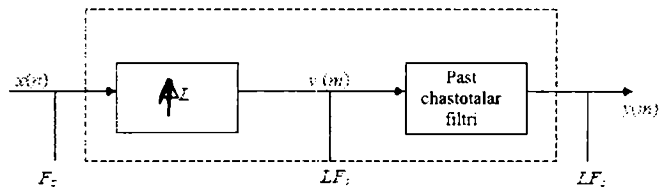


8.2-rasm. Chastotasi 6 kHz bo'lgan signalni 2 kHz gacha desimatsiyalashning spektral ko'rinishda tasvirlash

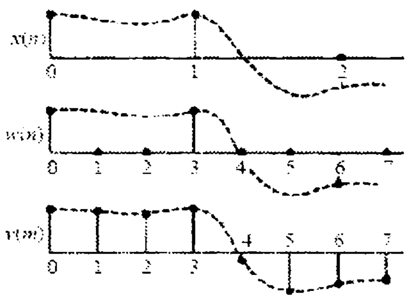
8.3. Diskretlash chastotasini kattalashtirish: butun qadamli interpolyatsiyalash

Interpolyatsiya – bu analog raqamli o'zgartirishning raqamli ekvivalenti bo'lib, bunda raqam-analog o'zgartirgich kirishiga berilgan raqamli oniy qiymatlardan interpolyatsiya yordamida analog signal tiklanadi.

Berilgan diskretlash chastotasi F bo'lgan $x(n)$ signal interpolyatsiyalash natijasida diskretlash chastotasi L marta kattalashadi, ya'ni LF ga teng bo'ladi. Interpolyator strukturaviy sxemasi 8.3*a*-rasmda keltirilgan.



a



b

8.3-rasm. Vaqt bo‘yicha $L=3$ qadam bilan interpolyatsiyalashni tasvirlash

Interpolyatsiyalash qurilmasi quyidagi qismlardan tashkil topgan: diskretlash chastotasini interpolyatsiyalash koeffisienti L bo‘lgan diskretlash chastotasi ekspanderi. Kirish signali $x(n)$ ning har bir oniy qiymati uchun qo‘shimcha ($L-1$) ta yangi oniy qiymat kiritish orqali yangi diskretlash chastotasi LF bo‘lgan $w(m)$ signalni shakllantiradi. So‘ngra bu signal diskretlash chastotasini kattalashtirish natijasida hosil bo‘lgan aks chastotali tashkil etuvchisini yo‘qotish uchun past chastotalar filtridan o‘tkaziladi va $y(m)$ chiqish signali olinadi.

($L-1$) ta nollarning kiritilishi har bir dastlabki oniy qiymat energiyasini L ta chiqish signali oniy qiymatlariga taqsimlanishiga olib keladi, ya’ni har bir dastlabki oniy qiymat L marta kichiklashadi. Ushbu holatni bartaraf etish uchun chiqish signali $y(n)$ ni L ga ko‘paytirish kerak. Interpolyatsiya jarayoni amalga oshirilganda kirish va chiqish signallari quyidagi bog‘lanishlar orqali ifodalanadi:

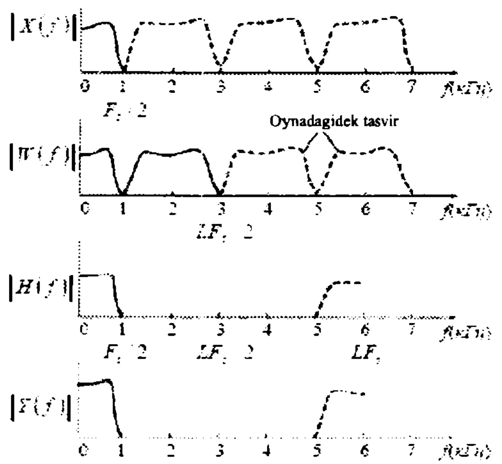
$$y(m)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)w(m-k)\,. \qquad (8.2a)$$

bunda

$$w(m)=\begin{cases} x(m/L), & m=0,\pm L,\pm 2L,\ldots \\ 0 \end{cases} \qquad (8.2б)$$

$L = 3$ holat uchun vaqt bo'yicha interpolyatsiyalash jarayoni 8.3*b*-rasmda keltirilgan. Bunda har bir kirish oniy qiymati uchta chiqish oniy qiymati shakllanishiga sabab bo'ladi (ekspander ikkita nol oniy qiymatlarni kiritadi).

Ushbu jarayonni chastota funksiyasi orqali ifodalanishi 8.4-rasmda keltirilgan.



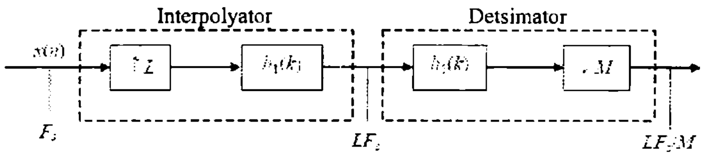
8.4-rasm. Signalni 2 kHz dan 6 kHz ga interpolyatsiyalashni spektral ko'rinishda tasvirlash

$X(f)$, $W(f)$ va $Y(f)$ funksiyalar mos ravishda $x(n)\,w(n)$ va $y(m)$ signallarning chastota xarakteristikasi (spektri). $H(f)$ – bu aks chastotalarni yo'qotish filtri amplituda-chastota xarakteristikasi. Bu filtr $W(f)$ da punktir chiziqlar bilan belgilangan aks chastota tashkil etuvchilarini yo'qotish uchun kerak. Shuni ta'kidlash kerakki, desimatsiyalash va interpolyatsiyalash jarayonlari bir juftlik (ikkilik) ni tashkil etadi, ya'ni bir-biriga teskari amallar. Bu juftlik xossasi interpolyatorni ekspanderdan osongina olish mumkin va aksincha, ekspanderdan interpolyatorni olish mumkin.

8.4. Diskretlash chastotasini butun bo'lmagan qadamli almashtirish

Ba'zi hollarda diskretlash chastotalarini butun bo'lmagan songa o'zgartirishga ehtiyoj tug'iladi. Misol uchun, raqamli audio tizimida, ma'lumotlarni bir xotira qurilmasidan boshqasiga uzatishda ularning diskretlash chastotasi turlicha bo'lishi mumkin (noqonuniy nusxa ko'chirishning oldini olish uchun). Misol uchun, bu kompakt disklardagi ma'lumotlarni qayta eshitishda 44,1 kHz uni audio tasma (lenta)ga raqamli shaklda yozishda (48 kHz). Ushbu jarayonni amalga oshirish uchun kompakt disk diskretlash chastotasini 48/44,1 marta kattalashtirish kerak bo'ladi.

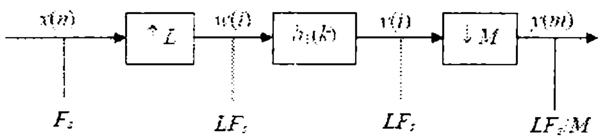
Amalda bunday butun son bo'lmagan ko'paytma (koeffisientlar)ni rasional son ko'rinishida, ya'ni ikki butun sonlar L va M lar nisbati shaklida bo'lgan, talab etiladigan ko'paytmaga iloji boricha yaqin bo'lgan kasr son shaklida ifodalanadi. Diskretlash chastotasini almashtirish ikki bosqichda amalga oshiriladi: ma'lumotlarni L qadam bilan interpolyatsiyalash va M qadam bilan desimatsiyalash (8.5-rasm).



8.5-rasm. Rasional qadam bilan interpolyatsiyalashni tasvirlash

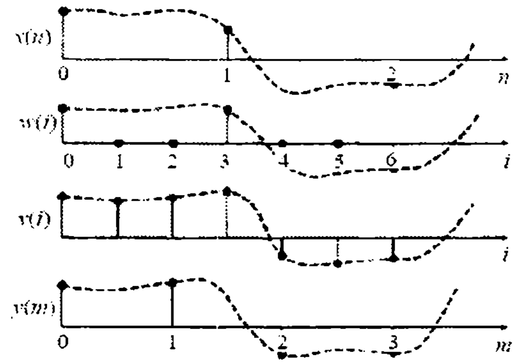
Hamma vaqt desimatsiyalashdan oldin interpolyatsiyalash jarayoni amalga oshirilishi kerak, aks holda desimatsiyalash natijasida ba'zi chastotali tashkil etuvchilar yo'qotilishi mumkin. Yuqorida keltirilgan (kompakt diskdan raqamli audiotasmaga) almashtirishdagi talab etiladigan 48/44,1 ni quyidagicha amalga oshirish mumkin: $L = 160$ bo'lgan qadam bilan interpolyatsiyalash va so'ngra $M = 147$ qadam bilan desimatsiyalashni amalga oshirish kerak, ya'ni dastlab kompakt disk tezligi $L = 160$ marta 7056 kHz gacha kattalashtiriladi, so'ngra $M = 147$ marta, ya'ni 48 kHz gacha kichiklashtiriladi.

8.5-rasmdagi past chastotalar filtri $h(k)$ va $h(k)$ ketma-ket kaskad shaklida ulangani va bir xil diskretlash chastotasiga egaligi uchun ularni birlashtirish natijasida yagona diskretlash chastotasi konvertorini olish mumkin (8.6-rasm).



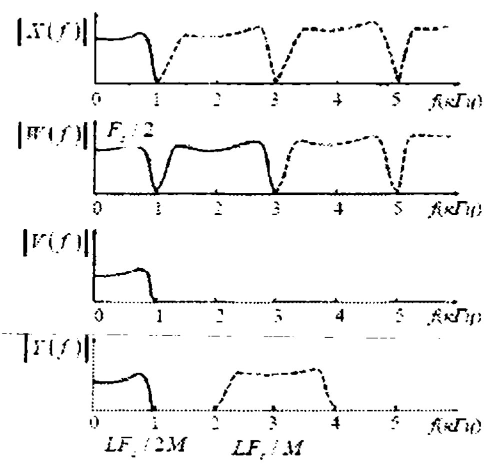
8.6-rasm. Rasional qadamli interpolyatsiyalash qurilmasi strukturaviy sxemasi

Agar $M > L$ bo'lsa, u holda konvertor tomonidan bajariladigan amal butun bo'lmagan qadamni desimatsiyalash va $M < L$ bo'lsa interpolyatsiyalash deb ataladi. Bundan tashqari agar $M = 1$ bo'lsa umumlashgan sxema – konvertor bajarayotgan amal oddiy butun qadamli interpolyatsiya va $L = 1$ bo'lgan holda esa butun qadamli desimatsiya bo'ladi. 8.7-rasmda qadami 3/2 bo'lgan interpolyatsiyalash tasvirlangan. Bunda dastlab diskretlash chastotasi 3 marta oshiriladi ($x(n)$ ning har bir oniy qiymatiga ikkita nolli oniy qiymat qo'shiladi), so'ngra signal past chastotalar filtridan o'tkaziladi va natijada $v(i)$ olinadi.



8.7-rasm. Rasional qadamli interpolyatsiyaning vaqt diagrammalari

Keyingi bosqichda filtrlangan signaldan dastlabkisiga qaraganda ikki marta katta qadam bilan oniy qiymatlar olinadi, ya'ni har ikki $v(i)$ oniy qiymatdan bittasi qoladi. Ushbu jarayonni chastotalar oblastidagi tasvirlanishi 8.8-rasmda keltirilgan.



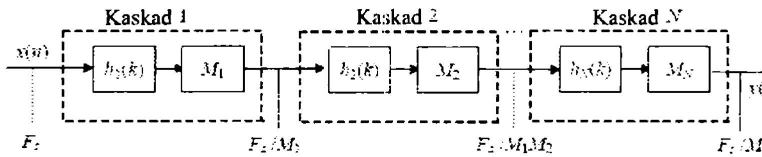
8.8-rasm. Diskretlash chastotasini 2 kHz dan 3/2 marta oshirishni spektral ko'rinishda tasvirlash

Dastlab kirish signali $x(n)$ diskretlash chastotasi 2 kHz 3 (uch) marotaba kattalashtiriladi va 6 kHz ga teng bo'ladi, so'ngra signal spektrining bir-birini ustiga tushishiga sabab bo'luvchi aks chastotalarni yo'qotish uchun filtrlanadi va nihoyat, bu signal chastotasi ikki martaga kamaytiriladi.

8.5. Diskretlash chastotasini ko'p kaskadli almashtirish

Diskretlash chastotasini yagona desimatsiyalash va interpolyatsiyalash koeffisientidan foydalanib amalga oshirish mumkin. Agar diskretlash chastotasini juda ko'p marotaba kattalashtirish yoki kichiklashtirish talab etilsa, u holda diskretlash chastotasini almashtirishni bir necha bosqichda amalga oshirish maqsadga muvofiq hisoblanadi, bunda bir necha ketma-ket ulangan kaskadlardan foydalaniladi. Amalda turli kattalikdagi diskretlash chastotalariga raqamli ishlov berishda ko'p kaskadli metoddan foydalaniladi. Natijada diskretlash chastotasini asta-sekin kamaytirish va kattalashtirish orqali spektrlarning bir-biri ustiga tushmasligini ta'minlovchi filtrlarga qo'yiladigan talablar pasayadi, shu bilan birga aks chastotalarni yo'qotish sifati oshadi.

M ta kaskadli desimatsiyalashni amalga oshiruvchi qurilma strukturaviy sxemasi 8.9-rasmda keltirilgan.



8.9-rasm. Ko'p kaskadli desimatsiyalashni amalga oshiruvchi qurilma strukturaviy sxemasi

Desimatsiyalash umumiy qadami kichik qadamlar ko'paytmasi orqali ifodalanadi, ya'ni

$$M = M_1 M_2 \ldots M_N. \tag{8.3}$$

bunda M – butun son N-kaskad desimatsiyalash qadami. Har bir kaskad alohida – mustaqil desimator bo'lib, punktir chiziqlar bilan chizilgan to'g'rito'rtburchakdan iborat. Agar $M >> 1$ bo'lsa, ko'p kaskadli desimator hisoblashga va uning xotirasiga bo'lgan talablarni kamaytiradi, desimatsiyalashda foydalaniladigan filtrlar xarakteristikalariga bo'lgan talablarni pasaytiradi va natijada cheklangan razryadlilik xossasiga kam sezgir bo'lgan filtrlardan foydalanish imkoniyatini beradi. Keltirilgan afzalliklarni qurilmani loyihalashni va amalga oshirishni murakkablashtirish hisobiga amalga oshiriladi.

8.6. Filtrlarga qo'yiladigan asosiy talablar

Raqamli filtr konvertoridan signal spektrining bir-biri ustiga tushishini yoki aks chastota tashkil etuvchisini yo'qotishda foydalaniladi. Turli tezlikda signallarga ishlov berish tezkorligi foydalaniladigan filtr turi va sifatiga bog'liq. Desimatsiyalash va interpolyatsiyalashda impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlardan foydalanish mumkin, ammo impuls xarakteristikasi chekli filtrlardan ko'p hollarda foydalaniladi.

Turli tezlikda signallarga ishlov berishda, signallarga oddiy raqamli ishlov berishda impuls xarakteristikasi chekli filtrni hisoblash samaradorligi impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarniki bilan deyarli bir xil, ba'zi hollarda katta. Diskretlash chastotasini kamaytirish natijasida desimator signal spektri bir-birining ustiga tushmasligini ta'minlash uchun filtr quyidagi talablarga javob berishi kerak:

signal chastotalarini o'tkazish polosasi – $0 \le f \le f$, (8.4a)

signal chastotalarini o'tkazmaslik polosasi – $F/2M \le f \le F/2$, (8.4b)

o'tkazish polosasidagi farqlanishlar – δ , (8.4v)

o'tkazmaslik polosasidagi farqlanishlar – δ , (8.4g)

bunda $f < F/2M$ bo'lib, F – birlamchi diskretlash chastotasi. Odatda f – birlamchi signal e'tiborga olinadigan eng katta chastota.

Interpolyatsiyalashda boshqa muammo – aks chastota muammosi yuzaga keladi. Bu muammoni hal qilish uchun faqat foydali axborot spektr tashkil etuvchilarini o'tkazuvchi va diskretlash chastotasi o'zgargan signallar spektrini $F/2$ gacha o'tkazadi. Ammo eng katta e'tiborga olinadigan chastota interpolyatsiya natijasida LF gacha kattalashtirilganligini e'tiborga olsak $LF/2$ ga teng bo'ladi, signalni diskretizatsiyalash teoremasiga asosan uning polosasini $F/2$ cheklash kerak, chunki bu $x(n)$ ning eng katta e'tiborga olinadigan chastotasi.

Interpolyatsiyalashda foydalaniladigan filtrga umumiy talablar:

filtr o'tkazish polosasi – $0 \le f \le f$, (8.5a)

filtr o'tkazmaslik polosasi – $F/2 \le f \le LF/2$, (8.5b)

filtr o'tkazish polosasidagi farqlanishlar – δ , (8.5v)

filtr o'tkazmaslik polosasidagi farqlanishlar – δ , (8.5g)

bunda $f < F/2$.

Interpolyatsiyalash natijasida signal amplitudasining kichiklashishi o'rnini qoplash (kompressiyalash) uchun filtr o'tkazish polosasidagi spektr tashkil etuvchilari energiyasini L marta oshirish kerak.

8.7. Kaskadlar soni va desimatsiyalash qadamini aniqlash

Raqamli filtrni ko‘p kaskadli shaklda loyihalash hisoblash va xotiraga bo‘lgan talablarda bir kaskadli strukturaga qaraganda sezilarli tejamkorlikni ta’minlaydi. Tejamkorlik darajasi foydalaniladigan kaskadlar soniga va alohida kaskadlar desimatsiyalash qadamini tanlanishiga bog‘liq. Bunda asosiy masala kaskadlar optimal sonini aniqlash va har bir kaskad uchun desimatsiyalash qadamini aniqlash hisoblanadi. Kaskadlarning eng optimal soni birga teng, chunki bunda hisoblashlar hajmi eng kichik bo‘ladi, agar uni bir soniyada bajariladigan amallar soni (SAS) orqali baholasak yoki koeffisientlarni saqlash uchun umumiy talab etiladigan xotira (UTX) quyidagilar orqali aniqlanadi:

$$SAS = \sum K F\,, \tag{8.6a}$$

$$UTX = \sum K\,, \tag{8.6б}$$

bunda K – i chi kaskad koeffisientlari soni bo‘lib, bunda filtr koeffisientlari simmetrik ekanligi e'tiborga olinmaydi.

Kaskadlar soni N va desimatsiyalash qadamini tanlash – bu (netrivial) oddiy masala emas. Odatda, amalda kaskadlar soni 3 yoki 4 ga teng etib tanlanadi. Bundan tashqari M ning berilgan qiymati uchun cheklangan butun sonlar ko‘paytmasi mavjud. Demak M ni keltirib chiqaruvchi hamma ko‘paytmalar M qiymatlari, ya’ni M ning qiymatlari va unga mos bo‘lgan SAS va UTX parametrlarini aniqlash kerak. So‘ngra ular orasidan eng optimal va masalani yechish uchun eng maqsadga muvofiqini tanlash kerak.

Umuman olganda SAS va UTX parametrlari optimal qiymatlariga erishish uchun desimatsiyalash qadami quyidagi talabga javob berishi kerak:

$$M_1 > M_2 \quad \ldots > M_i\,. \tag{8.7}$$

bunda M $(i = 1,\ldots,N)$ o‘zgarmas kattalik. Shuning bilan birga agar ko‘paytma tashkil etuvchilari butun sonlar bo‘lsa, N ning ma’lum qiymatlari uchun (8.7) tenHzizlikni hamma vaqt ham bajarish mumkin bo‘lmaydi, misol uchun, agar $N = 3$ va $M = 32$ bo‘lgan holda.

$N = 2$ ya’ni ikki kaskadli desimator uchun UTX parametrlarini minimallashtiruvchi desimatsiyalash optimal qadami quyidagiga teng bo‘ladi:

$$M_{1opt} = \frac{2M}{2 - \Delta f + (2M\Delta f)^{1/2}}. \qquad (8.8a)$$

$$M_{2opt} = \frac{M}{M_{1opt}}. \qquad (8.8б)$$

Agar $N > 2$ bo'lgan holat uchun oddiy analitik ifoda mavjud emas, shuning uchun optimal desimatsiyalash qadami M ni aniqlash uchun kompyuterda optimallashtirish dasturidan foydalanib sonli hisoblashni qo'llash kerak.

Nazorat savollari

1. Diskretlash chastotasini kamaytirishdan qanday holatlarda foydalaniladi?

2. Butun qadamli desimatsiyalash qanday amalga oshiriladi?

3. Desimatsiyalash qurilmasi strukturaviy sxemasini chizing va unda bajariladigan jarayonlarni tushuntiring.

4. Desimatsiyalashning spektral usuli qanday amalga oshiriladi?

5. Diskretlash chastotasini oshirishdan qanday holatlarda foydalaniladi?

6. Vaqt va spektr bo'yicha interpolyatsiyalash usuli haqida so'zlab bering.

7. Diskretizatsiyalash chastotasini butun bo'lmagan qadamga almashtirish qanday amalga oshiriladi?

8. Ko'p kaskadli desimatsiyalash haqida asosiy tushunchangizni aytib bering.

9. ADAPTIV FILTRLAR HAQIDA ASOSIY TUSHUNCHALAR

Signallarga optimal ishlov berish usullarini ishlashda ko'p hollarda signal va shovqinlarning statistik modellaridan foydalanish tavsiya etiladi. Ko'p hollarda signallarga ishlov berish qurilmasi chiziqli rejimda ishlaydi hamda unga stasionar va normal taqsimot qonuniga bo'ysunuvchi signal ta'sir etadi deb fikr yuritiladi. Ammo real sharoitda yuqorida qabul qilingan shartlar to'liq bajarilmaydi va natija signalini qabul qilish usuliga ham bog'liq bo'ladi. Bunday hollarda kirish signallarining statistik ko'rsatkichlariga qarab o'z parametrlarini o'zgartiruvchi adaptiv filtrlardan foydalanish o'rinli hisoblanadi.

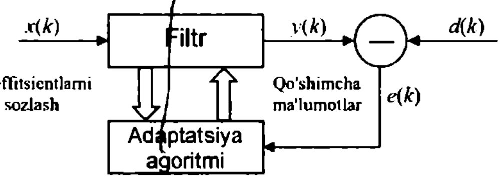
Hozirda adaptiv filtrlar hisoblash amalining murakkabligi, o'zgaruvchanlik xususiyatlari, foydalaniladigan dastlabki ma'lumotlar va moslashadigan (adaptiv) filtrlar tarkibiy uzilishiga ham bog'liq.

Adaptiv filtrlarni bir necha turlarga ajratish mumkin. Bunda asosiy belgilardan biri bu etalon (andozaviy) yoki tayanch signalining bor yoki yo'qligi hisoblanadi. Agar etalon signali bor bo'lsa, u holda adaptatsiya (moslashish) jarayoni o'qituvchi yordamida bilim olish deb ataladi. Bu holda adaptiv filtr o'z chiqish signalini iloji boricha etalon signalga moslashtirishga intiladi. Moslashish darajasi adaptiv filtrlarning ishlash algoritmiga bog'liq. Etalon signalsiz moslashish "ko'r-ko'rona" moslashuv yoki o'qituvchisiz bilim olish deb ataladi. Bu holda albatta qabul qilinayotgan kirish signalining tarkibi haqida ba'zi ko'rsatkichlar ma'lum bo'lishi kerak (misol uchun, modulyatsiya turi va uning o'zgarish chegaralari). Ko'r-ko'rona adaptatsiyani amalga oshirish etalon signalni adaptatsiya usuliga qaraganda ancha murakkab hisoblash amallarini bajarishni talab qiladi.

Adaptiv filtrlarni turlarga ajratishda e'tibor berilishi kerak bo'ladigan belgilardan yana biri, bu signalga ishlov berish tizimidir. Bunda adaptiv tizimlar o'z navbatida ikki turga: chiziqli va chiziqsiz tizimlarga ajratiladi. Bunda chiziqlilik kirish signali sathiga bog'liqligi emas, adaptatsiya jarayonida sozlanadigan parametrga bog'liqligi nazarda tutiladi. Ko'p hollarda signalarga norekursiv filtrlarda ishlov berishga asoslangan chiziqli adaptiv tizimlardan foydalaniladi. Norekursiv filtrlarning asosiy afzalliklaridan biri filtr koeffisientlarining har qanday qiymatlarida uning ish holati barqarorligidir. Shuni e'tiborga olish kerakki, adaptatsiyalanish algoritmi teskari bog'lanish zanjiriga ega bo'lib, bu moslashuvchi tizimning barqarorligini yomonlashtirishi mumkin.

Nochiziqli adaptiv tizimlarga tirik organizmlarning ish holatini ma'lum darajada modellashga aoslangan neyron tarmoqlari kiradi. Nichiziqli adaptiv tizimlarning yana bir turi bu rekursiv adaptiv filtrlardir. Ammo bu tur filtrlarni yaratish uning barqarorligini ta'minlovchi muhim muammolarni keltirib chiqarishi sababli bu tur filtrlardan keng miqyosda foydalanilmaydi.

Etalon signalidan foydalanishga asoslangan adaptiv filtrlarni ko'rib chiqamiz. Bu tur adaptiv filtrning tarkibiy sxemasi 9.1-rasmda keltirilgan.



9.1-rasm. Adaptiv filtr struktura sxemasi

Kirish diskret signali $x(k)$ ga diskret filtrda ishlov berish natijasida chiqish signali $y(k)$ hosil bo'ladi. Bu chiqish signali etalon signal $d(k)$ bilan taqqoslanishi natijasida xatolik signali $e(k)$ hosil bo'ladi. Adaptiv filtrning vazifasi xatolik darajasini minimallashtirish orqali etalon signalni yaratishdan iborat. Shu maqsadda adaptatsiya bloki har bir oniy qiymatga ishlov berishdan so'ng xatolik signali $e(k)$ ni va filtrdan olinayotgan qo'shimcha ma'lumotlarni tahlil qiladi, ushbu tahlil natijalaridan filtr parametrlari (koeffisientlari)ni qo'shimcha sozlash uchun foydalaniladi.

Radiotexnik tizimlarda amalda asosan ikki tur adaptiv filtrlash algoritmlaridan foydalaniladi. Bular eng kichik kvadratik xatolik usulidan foydalanishga asoslangan algoritm (EKKX) va eng kichik kvadratik xatolik rekursiv usuliga asoslangan algoritm (EKKXRU). Bu har ikki algoritm optimal filtrlash tenglamalariga asoslanib amalga oshiriladi. Optimal filtrlash masalasi turlicha yechilishi mumkin, bular: gradient usulida optimal filtrlash va statistik yondashishdan foydalanishga asoslangan usul.

9.1. Viner optimal filtri

Optimal filtrlash haqida fikr yuritilganda quyidagi ikki narsaga asoslanish kerak: kirish signali matematik modeli va optimallashtirish sifati mezoni. Bu shartlar ma'lum bo'lsa, optimal filtrlash masalasi – optimallashtirish matematik modelini tuzish va uni analitik yoki sonli shaklda yechishga olib keladi.

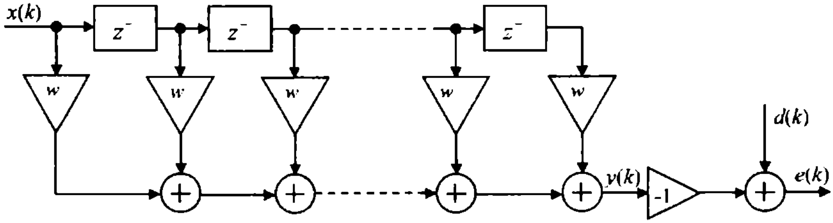
Misol shaklida, kirishiga tasodifiy diskret signal $\{x(k)\}$ N-tartibli koeffisientlari $\{w_n\}$, $n=0,1,....,N$ bo'lgan diskret filtrlar orqali ishlov berishini ko'rib chiqamiz (9.2-rasm).

Ushbu filtr chiqish signali quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$y(k)=\sum_{n=0}^{N} w_n x(k-n). \tag{9.1}$$

Kirish signali $\{x(k)\}$ dan tashqari yana namunaviy tasodifiy signal $d(k)$ ham bo'lib, namunaviy signalni qayta aks ettirish xatoligi quyidagiga teng:

$$e(k)=d(k)-y(k)=d(k)-\sum w\,x(k-n). \tag{9.2}$$



9.2-rasm. Xatolik signalini shakllantirish

Ushbu masalani yechish uchun diskret filtr koeffisientlari $\{w\}$ ning chiqish signali $y(k)$ ni namunaviy signalga eng katta o'xshash qiymatini aniqlash, ya'ni $e(k)$ xatolikning eng kichik qiymatini ta'minlovchi qiymatlarini topish kerak bo'ladi. $e(k)$ tasodifiy jarayon bo'lgani uchun uni baxolashda o'rtacha kvadratik xatolik tushunchasidan foydalanamiz. Shunday qilib optimallashtirilayotgan funksiya quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$J(\{w\})=\overline{e^{2}(k)}\to \min. \tag{9.3}$$

Bu masalani yechish uchun (9.2) ifodani matrisa ko'rinishiga keltiramiz. Buning uchun filtr koeffisientlari vektor ustunlarini $\overline{\mathrm{w}}$ orqali va filtr k-chi qadamidagi kechiktirish liniyasi chiqishidagi qiymatini $\overline{\mathrm{x}}(\mathrm{k})$ orqali belgilaymiz

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w \\ w \\ \dots \\ w \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(k)=\begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \\ x(k-N) \end{bmatrix}. \tag{9.4}$$

(9.4) ni e'tiborga olib (9.2) tenglikni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$e(k)=d(k)-\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}. \tag{9.5}$$

Xatolik $e(k)$ kvadrati quyidagiga teng bo'ladi:

$$\begin{aligned} e\;(k)&=\left(d(k)-\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}\right)=d\;(k)-2d(k)\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}+\left(\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}\right)= \\ &=d\;(k)-2d(k)\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}+\mathbf{w}\;\mathbf{x}(k)\mathbf{x}\;(k)\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{9.6}$$

(9.6) ifodani statistik o'rtacha qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$J(\mathbf{w}) = \overline{e\ (k)} = \overline{d\ (k)} - 2\overline{(d(k)\mathbf{x}(k))}\ \mathbf{w} + \mathbf{w}\ \overline{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}\ (k)}\mathbf{w}. \qquad (9.7)$$

Xatolik o‘rtacha statistik qiymati $\overline{e\ (k)}$ ni aniqlash ifodasi (9.7) tashkil etuvchilarini alohida-alohida ko‘rib chiqamiz:

1. $\overline{d\ (k)}$ – bu namunaviy signalning o‘rtacha kvadratik qiymati. (9.7) ifodaning alohida tashkil etuvchisi bo‘lib, u filtr koeffisientlari qiymatlariga bog‘liq emas, shuning uchun uni e’tiborga olmaslik mumkin, ammo u filtr koeffisientlarining optimal qiymatlarida xatolik o‘rtacha kvadratik qiymatiga ta’sir etadi.

2. $\overline{d(k)\mathbf{x}(k)}$ – bu namunaviy signal k-qiymati va kechiktirish filtri k-qadamidagi qiymatlari o‘zaro korrelyatsiyasining vektor ustuni. $x(k)$ va $d(k)$ – tasodifiy jarayonlarni birgalikda stasionar jarayonlar deb hisoblaymiz, u holda ularning korrelyatsiya vektorlari oniy qiymatlarini olish odimi tartib raqami k ga bog‘liq bo‘lmaydi:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \overline{d(k)x(k)} \\ \overline{d(k)x(k-1)} \\ \dots \\ \overline{d(k)x(k-N)} \end{bmatrix}. \qquad (9.8)$$

3. $\overline{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}\ (k)}$ – bu $(N+1)\times(N+1)$ o‘lchamli kvadratik matrisa bo‘lib, u signalning korrelyatsiya matrisasi deb ataladi. Stasionar tasodifiy jarayonlar uchun korrelyatsiya matrisasi bo‘lib uning diagonallariga korrelyatsiya funksiya qiymatlari mos keladi:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R\ (0) & R\ (1) & R\ (2) & R\ (N) \\ R\ (1) & R\ (0) & R\ (1) & R\ (N-1) \\ R\ (2) & R\ (1) & R\ (0) & R\ (N-2) \\ & & \dots & \\ R\ (N) & R\ (N-1) & R\ (N-2) & R\ (0) \end{bmatrix}, \qquad (9.9)$$

bunda, $R\ (\Delta k) = \overline{x(k)x(k-\Delta k)}$ – kirish signali korrelyatsiya funksiyasi.

Kiritilgan belgilanishlarni e’tiborga olib (9.7) formulani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$J(\mathbf{w}) = \sigma\ - 2\mathbf{p}^{\cdot}\mathbf{w} + \mathbf{w}\ \mathbf{R}\mathbf{w}. \qquad (9.10)$$

(9.10) ifoda $\mathbf{w}$ ga nisbatan kvadratik shakl bo‘lib, $\mathbf{R}$ matrisa yagona minimumga ega va funksiya minimum qiymatini topish uchun gradient vektorini nolga tenglashtirish kerak

$$\nabla J(\mathbf{w}) = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{0}. \qquad (9.11)$$

Ushbu (9.11) ifodadan Viner-Xopf tenglamasini olamiz:

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{p}. \qquad (9.12)$$

(9.12) tenglikning chap qismini teskari korrelyatsiya matrisasi $\mathbf{R}^{-}$ ga ko'paytirib, optimal filtr uchun kerakli yechimni olamiz,

$$\mathbf{w} = \mathbf{R} \ \mathbf{p}. \qquad (9.13)$$

(9.13) tenglama bilan ifodalanadigan filtr Viner filtri deb ataladi.

Viner filtrini ifodalovchi (9.13) tenglamaga (9.10) ifodani kiritib xatolik signali dispersiyasining erishishi mumkin bo'lgan minimal qiymati aniqlanadi:

$$\overline{e\ (k)} \ \ = \sigma \ \ - \mathbf{p} \ \mathbf{R} \ \mathbf{p}. \qquad (9.14)$$

$\overline{e(k)y(k)} = 0$ va $\overline{e(k)x(k)} = 0$ ekanligi, Viner filtri chiqishidagi xatolik signali uning chiqishidagi va kirishidagi signallar bilan korrelyatsiyalangan emas, ya'ni ular bir-biriga bog'liq emasligini bildiradi.

Uzatilgan signalni qayta tiklash, albatta filtrdan o'tishda signalni ma'lum bir vaqtga kechikishiga sabab bo'ladi, shuning uchun namunaviy signal uzatilayotgan signalning kechikkan nusxasi bo'lishi kerak,

$$d(k) = x\ (k - \Delta k). \qquad (9.15)$$

Filtr kechiktirish liniyasining k chi odimiga mos chiqishlarida buzilgan signalning k, $k-1, k-2$, ..., $k-N$ tartib raqamli oniy qiymatlari mos keladi, bunda N – filtrning tartibi. Ushbu oniy qiymatlarning har biri uzatilgan signal oniy qiymatlari chiziqli kombinatsiyasini tashkil etadi:

$$x(k-n) = \sum_{=-\infty}^{\infty} x\ (m) h_{-\,-} \qquad (9.16)$$

Birlamchi signal oniy qiymatlari statistik bog'liq bo'lmaganligi uchun $\mathbf{p}$ vektorning n chi elementini hisoblashda o'rtacha qiymati (9.15) ifodaning faqat bir tashkil etuvchisi uchun nolga teng bo'lmaydi. Bunda $x\,(k)$ signalning o'rtacha kvadratik qiymati birga tengligini ham e'tiborga olish kerak,

$$p \ = \overline{x(k-n)d(k)} = \overline{\sum_{=-\infty}^{\infty} x\ (m) h_{-\,-}\ x\ (k - \Delta k)} = \sum_{=-\infty}^{\infty} h_{-\,-}\ \overline{x\ (m) x\ (k - \Delta k)} = h_{\Delta\,-}. \qquad (9.17)$$

Shunday qilib, **p** vektor kanalning to'ntarilgan impuls xarakteristikasini (kerak hollarda har ikki tomonidan yoki bir tomonidan nollari kesilgan yoki nollari to'ldirilgan) anglatadi:

$$\mathbf{p}=\begin{bmatrix} h \\ h \\ \\ h \\ h \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (9.18)$$

9.2. Optimal yechimni gradientli izlash

Adaptiv algoritmlardan eng ko'p foydalaniladigani bu (9.11) maqsad funksiyasining minimumini (eng kichik qiymatini) eng tez tushish usuli orqali topish hisoblanadi. Ushbu usuldan foydalanilganda filtr koeffisientlari vektori iteratsiya tartib raqami k ga bog'liq, ya'ni $\mathbf{w}(k)$. Har bir iteratsiyada vektorlari maqsad funksiyasi gradientining ushbu nuqtadagi qiymatiga proporsional ravishda siljiydi:

$$\mathbf{w}(k+1)=\mathbf{w}(k)-\frac{\mu}{2}\nabla J(\mathbf{w}(k))=\mathbf{w}(k)+\mu\mathbf{p}-\mu\mathbf{R}\mathbf{w}(k), \qquad (9.19)$$

bunda, μ – musbat koeffisient bo'lib, u odim o'lchami deb ataladi.

Yuqorida keltirilgan (9.19) algoritm

$$0<\mu<2/\lambda \qquad (9.20)$$

bo'lganda yaqinlashadi. Bunda λ – **R** korrelyatsiya matrisasining maksimal xususiy miqdori. Yaqinlashish tezligi korrelyatsiya matrisasi **R** qiymatlarining yozilganligiga bog'liq bo'lib λ / λ nisbati qancha kichik bo'lsa, iteratsiya jarayoni shuncha qisqa vaqtda bo'lib o'tadi.

Eng kichik o'rtacha kvadratik xatolikni ta'minlovchi adaptivlanuvchi (moslashuvchi) algoritm. (9.19) formula asosida eng tez tushish (yaqinlashish)ni amalga oshirish uchun gradient qiymatlarini hisoblash kerak, buni amalga oshirish uchun o'z navbatida matrisa **R** va vektor **p** larning qiymatlarini bilish kerak. Amalda bu parametrlarning faqat kirish signallari olingan baholari ma'lum bo'lishi mumkin. Bunday baholardan biri korrelyatsiya matrisasi va o'zaro korrelyatsiya vektori oniy qiymatlari hisoblanadi. Bu qiymatlar hech qanday o'rtalashtirishlarsiz olinadi:

$$\mathbf{R}(k) = \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k),$$
$$\mathbf{p}(k) = d(k)\mathbf{x}(k). \qquad (9.21)$$

Bu baholashlardan foydalanilganda (9.19) formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu d(k)\mathbf{x}(k) - \mu \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k) = \mathbf{w}(k) + \mu \mathbf{x}(k)\left(d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(k)\right). \qquad (9.22)$$

Qavs ichidagi ifodalar namunaviy signal va filtr chiqishidagi k odim (qadam)dagi signal farqi, ya'ni filtrlash xatoligi $e(k)$ ga teng. Yuqoridagi e'tiborga olinsa, filtr koeffisientlarini rekursiv yangilash ifodasi juda sodda bo'ladi, ya'ni quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu e(k)\mathbf{x}(k). \qquad (9.23)$$

(9.23) formulaga asoslangan adaptiv filtrlash algoritmi eng kichik kvadratik qiymat (LMS – Least Mean Square) algoritmi nomi bilan yuritiladi. Ushbu (9.23) formulani o'rtacha kvadratik xatolik $\overline{e(k)}$ statistik gradienti o'rniga uning oniy qiymati $\overline{e(k)}$ bilan almashtirish orqali ham olish mumkin. LMS algoritmi sodda ko'rinishga egaligiga qaramasdan aniq analitik yechimi yo'q murakkab masala hisoblanadi.

Ushbu algoritm μ ning kichik oraliqda o'zgaruvchi qiymatlarida $\overline{e(k)}$ ning minimal qiymatlarini ta'minlashi mumkin, bunda μ ning eng katta chegaraviy qiymati

$$\mu_{max} \approx \frac{2}{\sum \lambda} = \frac{2}{trace(\mathbf{R})} = \frac{2}{(n+1)\sigma}, \qquad (9.24)$$

bunda, λ – korrelyatsiya matrisasi $\mathbf{R}$ ning xususiy sonlari, σ – filtr kirish signalining o'rtacha kvadratik qiymati.

Normallashgan LMS algoritmidan foydalanilganda μ koeffisientining har bir odim (qadam)dagi qiymati kechiktirish liniyasidagi signal energiyasi asosida hisoblanadi, ya'ni

$$\mu(k) = \frac{\mu}{\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \varepsilon}, \qquad (9.25)$$

bunda μ – μ ning 0 va 2 oralig'ida joylashgan normallashgan qiymati, ε esa kichik musbat kattalik bo'lib, filtr kirishidagi signal bo'lmagan holatda μ ning kattalashishini chegaralaydi.

(9.25) ifodadan ko'rinadiki μ ning eng katta qiymati $\frac{\mu}{\varepsilon}$ ga teng. Raqamli filtr koeffisientlari qiymatlari $k \to \infty$ bo'lgan holatda ham o'zining optimal qiymati atrofida tasodifiy qiymatlarga o'zgarib turadi. Shuning uchun o'tish jarayoni tugagandan so'ng ham filtrlash xatoligi Viner filtri xatoligi $\overline{e(k)}$ dan katta bo'ladi:

$$\overline{e(k)} = \overline{e(k)} + E_{..}, \tag{9.26}$$

bunda, $E_{..}$ – LMS algoritmi ortiqcha xatolik o'rtacha kvadratik qiymati.

Ortiqcha o'rtacha kvadratik xatolik va Viner filtri xatoligining nisbati xatoliklar farqlanish koeffisienti deb ataladi va quyidagicha aniqlanadi:

$$M = \frac{\overline{e(k)}}{e(k)} - 1 = \frac{E_{..}}{e(k)} \approx \frac{\mu \sum \lambda}{2 - \mu \sum \hat{\lambda}} = \frac{\mu (N+1) \sigma_{\kappa\iota\varphi}}{2 - \mu (N+1) \sigma_{\kappa\iota\varphi}} \approx \frac{\mu}{\mu \quad - \mu}. \tag{9.27}$$

Koeffisient μ ning qiymatlari LMS algoritmining ikki asosiy ko'rsatkichlari: tenglashishga intilish tezligi va farqlanish koeffisientiga ta'sir qiladi. μ qancha katta bo'lsa tenglashishga intilish algoritmi shuncha tez bajariladi, ammo farqlanish koeffisienti M shuncha katta bo'ladi va aksincha.

LMS algoritmining asosiy afzalligi hisoblashning soddaligi hisoblanadi, bunda filtr koeffisientlarini sozlash uchun har bir odim (qadam)da $2(N+1)$ ga teng sonli "ko'paytirish va qo'shish" amallarini bajarish kerak bo'ladi. Ammo tenglashishga intilish tezligining sekinligi va o'tish jarayoni tugugandan so'ng ham xatolik dispersiyasining nisbatan kattaligi uning kamchiligidir. Shuni alohida ta'kidlash kerakki, tenglashishga intilishni tezlashtirish va hisoblashlar hajmini kamaytirish bir-biriga zid bo'lgan talablardir.

Hozirda signallarga raqamli ishlov berishning bir qator algoritmlari mavjud bo'lib, ulardan amalda eng keng foydalaniladiganlari quyidagilardir:

- optimal filtrlashga determinantli masala deb qarash;
- adaptiv RLS algoritmi;
- eksponenta bo'yicha xotiradan chiqarish.

Optimal filtrlashga determinantli masala shaklida yondashish. LMS algoritmidan foydalanilganda filtr kirishidagi signalni tasodifiy jarayon deb hisoblab, namunaviy signalni filtr chiqishidagi farqlanishi – xatoligi dispersiyasini minimalashtirgan edik. Optimal filtrlashga determinantli masala shaklida yondashishda statistik metoddan foydalanilmaydi. Misol uchun, kirish signalining

$\{x(k)\}$ oniy qiymatlariga ishlov berish kerak bo'lsin, bunda N-tartibli norekursiv filtrning koeffisientlari $\{w\}$ $(n = 0, 1, ..., N)$ to'plamini tashkil etadi va namunaviy signal oniy qiymatlari esa $\{d(k)\}$ orqali baholanadi. Bu holda filtr chiqish signali (9.1), kirish signalini qayta tiklash xatoligi (9.2) yoki vektor shaklida (9.5) formulalar orqali aniqlanadi.

Optimal filtrlash masalasini yechish uchun filtrning chiqish namunaviy signalini qayta tiklash xatoligi o'rtacha kvadratik qiymatining minimal qiymatini ta'minlovchi $\{w\}$ koeffisientlari aniqlanadi, bu holda

$$J(\{w\}) = \sum |e(k)| \quad \to \min . \tag{9.28}$$

Buning uchun (9.5) formulani matrisa shakliga o'tish, chiqish signali vektor-ustunlari – $\mathbf{y}$ va kirish signalini qayta tiklash xatoligi – $\mathbf{e}$ ni aniqlaymiz:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\ \mathbf{w}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}\ \mathbf{w}, \tag{9.29}$$

bunda, $\mathbf{d}$ – namunaviy signal oniy qiymatlari vektor-ustuni va $\mathbf{X}$ – matrisa ustunlari kechiktirish liniyasi turli traktlaridagi qiymatlari:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d(0) \\ d(1) \\ \dots \\ d(K-1) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = [\mathbf{x}(0)\mathbf{x}(1)...\mathbf{x}(N-1)].$$

Xatolikning eng kichik qiymatiga erishish uchun

$$J(\mathbf{w}) = \mathbf{e}'\mathbf{e} \to \mathbf{min} \tag{9.30}$$

bo'lishi kerak, buning uchun $\nabla J(\mathbf{w}) = -2\mathbf{Xd} - 2\mathbf{XX}\ \mathbf{w} = \mathbf{0}$ sharti bajarilishi talab etiladi. Filtr optimal bo'lishi uchun quyidagi shartni bajarish kerak:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{XX}\ )\ \mathbf{Xd} \tag{9.31}$$

bo'ladi, ya'ni (9.31) ifoda (9.12) ifodaga o'xshash bo'lib, statistik ma'noda optimal bo'lgan Viner filtrini eslatadi. Haqiqatda ham agar $(\mathbf{XX}\ )/K$ signalni vaqt bo'yicha o'rtachalashtirilgan yagona kuzatish natijasida olingan korrelyatsion matrisasining bahosi deb hisoblasak va $\mathbf{Xd}/K$ ni namunaviy signal va kechiktirish liniyasi chiqishidagi signal bilan o'zaro korrelyatsiya funksiyasi deb hisoblash mumkin. Bu holda (9.12) va (9.31) formulalar bir xil mazmunga ega bo'ladi.

RLS adaptiv algoritmi. Signallarga raqamli filtrlarda ishlov berishda kirish signalining har bir k-chi oniy qiymati aniqlanganda (9.31) fomula orqali filtr koeffisientlarini hisoblash mumkin. Ammo bu usuldan foydalanish hisoblashlar hajmining nihoyatda kattalashishiga olib keladi. Haqiqatda ham har bir odim (qadam)da X matrisa o'lchami kattalashadi, bundan tashqari har bir matrisa uchun teskari matrisa (XX) qiymatlarini qayta hisoblash talab etiladi. Hisoblashlar hajmini har bir odimdan so'ng X matrisaga yana bir yangi ustun qo'shish va d vektorga yangi bir tashkil etuvchi qo'shish kerak bo'ladi. Natijada hisoblashlarni rekursiv tashkil etish imkoniyati paydo bo'ladi. Bu algoritm eng kichik qiymatni rekursiv hisoblash metodi deb nomlanadi.

RLS adaptiv algoritmidan foydalanilganda kirish signalining har bir oniy qiymatlari olingandan so'ng quyidagi amallarni bajarish kerak:

1. Kirish signalining navbatdagi $\mathbf{x}(k)$ oniy qiymatlari olingandan so'ng filtrning navbatdagi $\mathbf{w}(k-1)$ koeffisientlaridan foydalanib filtrlash va chiqishidagi namunaviy signal xatoligi hisoblanadi:

$$y(k)=\mathbf{x}(k)\ \mathbf{w}(k-1), \qquad e(k)=d(k)-y(k). \tag{9.32}$$

2. Kuchaytirish koeffisientlari vektori ustunlari hisoblanadi. Bunda har bir navbatdagi hisoblashlarda kuchaytirish koeffisienti $\mathbf{K}$ ning qiymati qaytadan hisoblanadi, ya'ni hisoblash rekursiv bo'lmaydi, so'ngra ikki hisoblashlarda kasr maxraji skalyar kattalik bo'ladi (matrisa emas):

$$\mathbf{K}(k)=\frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}{1+\mathbf{x}\ (k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}. \tag{9.33}$$

3. Signal teskari korrelyatsiya matrisasi bahosini yangilash amali bajariladi:

$$\mathbf{P}(k)=\mathbf{P}(k-1)-\frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)\ \mathbf{P}(k-1)}{1+\mathbf{x}(k)\ \mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}. \tag{9.34}$$

4. Filtr koeffisientlari yangilanadi:

$$\mathbf{w}(k)=\mathbf{w}(k-1)+\mathbf{K}(k)e(k). \tag{9.35}$$

Navbatdagi vazifa $\mathbf{P}$ matrisa va $\mathbf{w}$ vektorning rekursiv yangilanadigan boshlang'ich qiymatlariga nisbatan aniqlik kiritishdan iborat. Odatda filtr koeffisientlari vektori $\mathbf{w}$ algoritmi bo'yicha amalni bajarishdan avval nollar bilan to'ldiriladi. $\mathbf{P}$ matrisani tahlil qilish shuni ko'rsatadiki, kechiktirish liniyasi kirish signallari oniy qiymatlari bilan to'ldirilgandan so'ng, hisoblash natijasi boshlang'ich shartlarga bog'liq bo'lmaydi, agarda

$$
\mathbf{P}(-1) = \begin{matrix} \infty & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \infty & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \infty & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \infty \end{matrix} . \qquad (9.36)
$$

Amalda matrisa diagonali katta musbat qiymatlar bilan to'ldiriladi, misol uchun uni $100/\sigma$ ga teng qilib olish tavsiya etiladi.

LMS algoritmiga qaraganda RLS algoritmi nisbatan ko'p hisoblash amallarini bajarishni talab qiladi. Filtr koeffisientlarini yangilash uchun hisoblashlarni optimal tashkil etilganda $2{,}5N^{\;} + 4N$ juft "ko'paytirish va qo'shish" amallarini bajarish talab etiladi. Bunda hisoblashlarni optimal hisoblash deganda $\mathbf{P}$ matrisaning simmetrik ekanligini e'tiborga olish nazarda tutilgan. Shunday qilib, RLS algoritmida bajariladigan amallar soni filtr tartibiga bog'liq kvadratik qonun bo'yicha ko'payib boradi. Ammo RLS algoritmidan foydalanilganda LMS algoritmiga qaraganda tenglikka intilish tezroq amalga oshadi. RLS algoritmi har bir odim (qadam)da filtr koeffisientlari (9.31) formulaga mos keluvchi optimal qiymatlarga ega bo'ladi, signalga ishlov berish boshida o'tish jarayoni $\mathbf{P}$ matrisa bahosini rekursiv hisoblashga va kechiktirish liniyasining kirish signali oniy qiymatlari bilan asta-sekin to'lishiga bog'liq.

Eksponenta qonuni bo'yicha unutish. (9.28) va (9.30) formulalarda xatolik qiymatlariga signal uzatish vaqti davomida bir xil talab qo'yiladi. Natijada kirish signali statistik qiymatlari vaqt davomida o'zgarishi filtrlash sifatining yomonlashishiga sabab bo'ladi. Filtrga kirish signalining nostasionarligini kuzatish imkoniyatini berish uchun (9.28) formulaga eksponensional qonun bo'yicha unutish imkoniyatini berish, ya'ni xatolik signali avvalgi qiymatlarini eksponenta bo'yicha kichiklashtirish koeffisientini kiritish kerak bo'ladi:

$$
J(\mathbf{w}) = \sum \lambda^{-\,-} |e(k)| \;, \qquad (9.37)
$$

bunda λ – unutish koeffisienti ($0 < \lambda \leq 1$).

Eksponenta bo'yicha unutishdan foydalanilganda (9.33) va (9.34) formulalar quyidagi ko'rinishni oladilar:

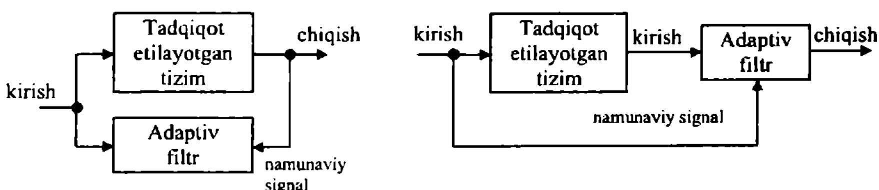
$$
\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(k)}{\lambda + \mathbf{x}\ (k)\mathbf{P}(k-1)\mathbf{x}(n)},
$$

$$
\mathbf{P}(k) = \frac{1}{\lambda}\left(\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{x}\ (k)\mathbf{P}(k-1)\right). \qquad (9.38)
$$

9.3. Adaptiv filtrlardan amaliy foydalanish

Adaptiv filtrlardan signallarga ishlov berish bilan bog'liq tizimlarda keng foydalaniladi. Adaptiv filtrlashni amalga oshirish identifikatsiyalash masalasini yechish, ya'ni tizimning ba'zi xarakteristikalarini aniqlash orqali amalga oshiriladi. Identifikatsiyalashni amalga oshirishning ikki: to'g'ri va teskari usuli mavjud. Birinchi holatda adaptiv filtr tadqiqot etilayotgan tizimga parallel ulanadi (9.3a-rasm). Bunda kirish signali tadqiqot etilayotgan tizim va adaptiv filtr uchun umumiy bo'ladi, chiqish signali esa adaptiv filtr uchun namunaviy signal vazifasini bajaradi. Adaptatsiyalanish jarayonida filtrning vaqt va chastota xarakteristikalari tadqiqot etilayotgan tizimning mos xarakteristikalariga intiladi.

Ikkinchi holatda, teskari identifikatsiya usulidan foydalanilganda adaptiv filtr tadqiqot etilayotgan tizimga ketma-ket ulanadi (9.3b-rasm). Bu usulda tadqiqot etilayotgan tizimning chiqish signali adaptiv filtr kirishiga beriladi, tizim kirish signali esa adaptiv filtr uchun namunaviy signal vazifasini bajaradi.



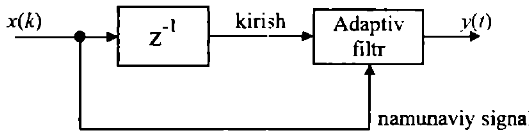
a *b*

9.3-rasm. Adaptiv filtr yordamida tizim identifikatsiyasi: *a* – to'g'ri, *b* – teskari

Shunday qilib, adaptiv filtr tadqiqot etilayotgan tizim ta'sirini – buzilishlarni bartaraf etib, birlamchi kirish signalini tiklaydi. Endi umumlashgan sxemalardan adaptiv filtrlardan foydalanib, aniq bir vazifani bajaruvchi qurilmalarni ko'rib chiqamiz.

9.3.1. Chiziqli bashoratlash

Bashoratlovchi filtrlar signalning avvalgi oniy qiymatlari asosida o'z chiqishlarida haqiqiy kirish signalidan eng kam o'rtacha kvadratik xatolik bilan farqlanuvchi signalni tiklaydi. Ushbu vazifani biz ko'rib o'tgan Viner filtri ham bajarishi mumkin, bunda namunaviy signal sifatida signalning joriy oniy qiymatidan va filtr kirish signali sifatida bir taktga kechitirilgan signaldan foydalaniladi. Adaptiv algoritmlar ish jarayonida Viner optimal yechimini ta'minlashga intiladilar. Shuning uchun chiziqli bashoratlash masalasini yechish uchun strukturaviy sxemasi 9.4-rasmda keltirilgan adaptiv filtrdan foydalanish mumkin. Adaptatsiya (moslashish) jarayonida filtr koeffisientlari avtoregressiya modeli koeffisientlariga intiladi, natijada xatolik signali ushbu modelni qo'zg'atuvchi "oq shovqin" modelini beradi.

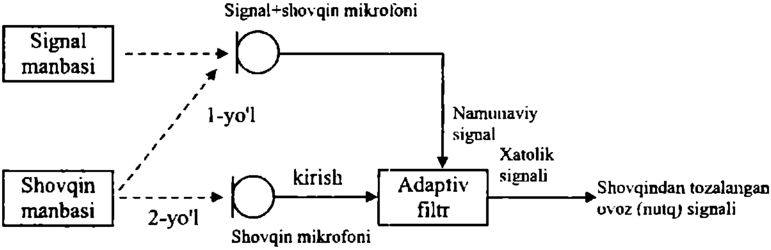


9.4-rasm. Adaptiv filtr yordamida chiziqli bashoratlash

9.3.2. Shovqinni bartaraf etish

Misol uchun samolyotni boshqaruvchilarni – uchuvchilarini yoki traktor haydovchisini nutq aloqa tizimi bilan ta'minlash kerak bo'lsin. Bu holda, tabiiyki, mikrofon orqali qabul qilinayotgan boshqaruvchi foydali tovushi katta sathli dvigatel shovqini ta'sirida bo'ladi. Bu holda ushbu shovqin ta'sirini to'g'ridan-to'g'ri yo'qotish mumkin emas, ammo uning ta'sirini yo'qotish, kamaytirish uchun dvigatelga yoki boshqa manbaga yaqin masofaga mikrofon o'rnatib shovqin signali namunasini olish mumkin. Ma'lumki, ushbu shovqin signalini ovoz va shovqindan iborat signaldan oddiy usulda ayirib, shovqinni bartaraf etish mumkin emas, chunki ular mikrofonlargacha turli masofani bosib o'tadilar va turlicha buzilishlar oladilar (9.5-rasm). Ammo har ikki shovqin ham tasodifiy jarayon bo'lib, ular o'zaro korrelyatsiya – bog'liqlikka ega bo'ladilar. Chunki ularning manbalari har ikki shovqin uchun umumiy – yagona. Shu bilan shovqin signali ovoz signali bilan korrelyatsiyaga ega emas, bir-biriga bog'liq emas.

Adaptiv filtr yordamida signal+shovqinni mikrofongacha to'g'ri identifikatsiyalash amali bajariladi. Adaptiv filtr kirish signali vazifasini qo'shimcha shovqin mikrofoni chiqishidagi signal bajaradi (9.5-rasmda – shovqin mikrofoni), namunaviy signal vazifasini signal+shovqin aralashmasi signali bajaradi (9.5-rasm, asosiy mikrofon).



9.5-rasm. Adaptiv filtr yordamida shovqinni bartaraf etish

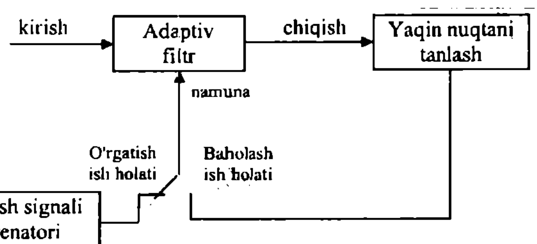
Adaptiv filtr kirish signalini shunday o'zgartiradiki, natijada u namunaviy signalga (o'rtacha kvadratik xatolik bilan) yaqinlashadi. Filtr kirishidagi signal+shovqin aralashmasining faqat shovqin tashkil etuvchi qismi bilan namunaviy signalning faqat shovqin tashkil etuvchisi korrelyatsiyaga ega, bog'liqlikka egaligi uchun adaptatsiya jarayoni oxirida filtr chiqishida shovqinning bahosi hosil bo'ladi. Xatolik signali adaptiv filtr chiqish signali va namunaviy sigal orasidagi farq shaklida aniqlanadi va u shovqindan tozalangan ovoz tovushiga teng bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan metoddan radiotexnika, radioaloqa va signallarga ishlov berish qurilmalarida ham foydadanish mumkin.

9.3.3. Aloqa kanali chastotalar xarakteristikasini to'g'rilash

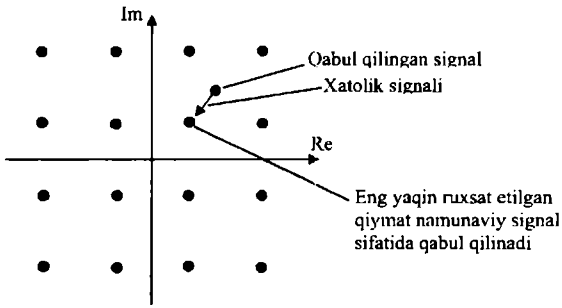
Aloqa kanali orqali signal uzatilganda real sharoitlarda kirish signali shakli albatta qisman buziladi. Bu buzilishlar natijasida raqamli aloqa tizimlari orqali diskret xabarlarni uzatishda xatoliklar kelib chiqishiga sabab bo'ladi. Ushbu xatoliklarni yo'qotish (yoki qisman kamaytirish) uchun aloqa kanalining signalga ta'sirini yo'qotish (kamaytirish) talab etiladi, buning uchun teskari identifikatsiyalash muammosini yechish kerak bo'ladi (9.3*b*-rasm). Aloqa kanali ta'sirida signallar buzilishini umuman yo'qotish (yoki kamaytirish) uchun, uning chastotalar xarakteristikasini to'g'rilash (tuzatish) kerak bo'ladi. Ushbu vazifani bajaruvchi to'g'rilovchi filtrlar ekvalayzerlar deb ataladi.

Adaptiv filtrlardan ekvalayzerlar sifatida foydalanilganda namunaviy signalni olish muammosi yuzaga keladi. Bu muammo aloqa kanali orqali ma'lumotlar uzatishdan oldin, u orqali maxsus sozlovchi signallarni uzatish orqali yechiladi. Ushbu sozlovchi signal sifatida "1" va "0" lar tasodifiysimon ketma-ketligidan foydalaniladi. Sozlovchi signalni shakllantirish algoritmi ko'p hollarda qaydlash tomonida ma'lum bo'ladi va uni qabullash tomonida mustaqil generatsiyalash va undan namunaviy signal sifatida adaptiv filtrni boshqarish (o'rgatish, o'qitish) uchun foydalanish mumkin. Bu ish holati adaptiv filtrni boshqarish (o'rgatish, o'qitish) ish holati deb ataladi (9.6-rasm).



9.6-rasm. Aloqa kanali chastotalar xarakteristikasini adaptiv filtr yordamida to'g'rilash

Aloqa kanali orqali sozlash signali uzatish tugallangandan so'ng asosiy ma'lumotlarni uzatish ish holatiga o'tiladi. Bunda qabullash qurilmasi kirish signalini baholash ish holatida bo'ladi. Namunaviy signalni olish uchun raqamli aloqa tizimlarida signallarning shakl (ko'rinish)lari cheklanganligidan foydalaniladi. Navbatdagi oniy qiymat qabul qilingandan so'ng unga yaqin bo'lgan ruxsat etilgan qiymat qidirib topiladi. Bu signaldan namunaviy signal sifatida foydalaniladi. Ushbu signal va qabul qilingan signal orasidagi farq xatolik signali bo'lib, undan adaptivlashtirish uchun foydalaniladi. 9.7-rasmda yuqoridagi fikrlar 16-holatli kvadratura manipulyatsiyali signal misolida aks ettirilgan.

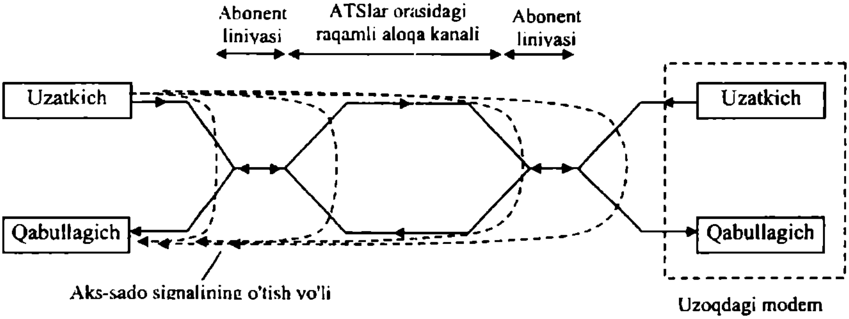


9.7-rasm. Baholash ish holatida namunaviy signalni va xatolik signalini shakllantirish

Ekvalayzer boshqarish ish holatida sozlangandan so'ng, filtr chiqishidagi shovqin shunday kattalikka ega bo'lishi mumkinki, eng yaqin turgan ruxsat etilgan nuqta saqlanib qoladi (xatolik ehtimolligi kichik), bu ish holatida adaptiv filtr o'z barqarorligini saqlab qoladi.

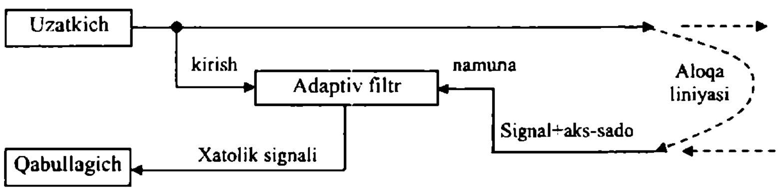
9.3.4. Aks sadoni bartaraf etish

Ushbu metoddan xuddi aloqa kanallari chastotalar xarakteristikasini to'g'rilash metodidek zamonaviy modemlarda keng foydalaniladi. Katta tezlik bilan ishlovchi modemlardan dupleks ish holatida – bir vaqtning o'zida signal uzatish va qabullashda foydalaniladi. Dupleks ish holatida signallarni uzatish va qabullashda yagona – umumiy chastotalar polosasidan foydalaniladi. Bu ish holatida uzatilayotgan signal ushbu stansiyaning qabullash qurilmasiga to'g'ridan-to'g'ri ta'sir qilib, uning ish holatiga xalaqit beradi. Ushbu uzatish stansiyasi nurlatayotgan signal turli yo'llar bilan tarqalishi va turlicha buzilishi mumkin (9.8-rasm). Bu aks-sado signalini adaptiv filtr yordamida yo'qotish mumkin. Bunda aks-sado tarqalish traktini to'g'ri indetifikatsiyalash usulidan foydalanish mumkin.



9.8-rasm. Aks-sado signalining shakllanishi

Adaptiv filtr kirishiga uzatish qurilmasi modemi signali ta'sir qiladi va namunaviy signal sifatida aks-sadoli qabullangan signaldan foydalaniladi (9.9-rasm). Adaptiv filtr aks-sado signal bahosini shakllantiradi va xatolik signali aks-sadodan tozalangan qabul qilinayotgan foydali signalga mos bo'ladi.



9.9-rasm.Adaptiv filtr yordamida aks-sadoni yo'qotish tizimi strukturaviy sxemasi

Aks sadoni yo'qotish tizimi to'g'ri ishlashi uchun uzatilayotgan va qabul qilingan signallar o'zaro korrelyatsiyasi – bog'liqligi bo'lmasligi kerak. Buning uchun uzatish qurilmasi modemiga berilayotgan diskret ma'lumotlar dastlab skremblerlash jarayonidan o'tkaziladi, ya'ni psevdotasodifiy bitlar ketma-ketligiga almashtiriladi. Bunda ikki bir-biri bilan birga ishlovchi modemlarda turli skremblerlardan foydalanali, natijada ular uzatilayotgan signallarning bir-biri bilan korrelyatsiyasi bo'lmasligi ta'minlanadi. 9.9-rasmda keltirilgan strukturaviy sxema asosida aks-sadoni yo'qotish metodidan hamma zamonaviy modemlarda foydalaniladi.

Nazorat savollari

1. *Qanday filtr adaptiv filtr deb ataladi?*
2. *Adaptiv filtr strukturaviy sxemasini chizing va uning ishlash prinsipini so'zlab bering.*

3. Eng kichik o'rtacha kvadratik xatolik deganda qanday xatolik nazarda tutiladi?

4. Qanday filtr Viner optimal filtri deb ataladi?

5. Raqamli filtrlarda xatolik signali shakllanish jarayonini uning strukturaviy sxemasi (9.2-rasm) yordamida tushuntirib bering.

6. Adaptiv filtrlashda namunaviy signal qanday vazifani bajaradi?

7. Viner-Xopf filtrini ifodalovchi ifodani yozing va uning ishlash prinsipini tushuntirib bering.

8. Adaptiv filtrlashda eng kichik o'rtacha kvadratik xatolikni ta'minlovchi LMS algoritmi haqida tushuncha bering.

9. LMS algoritmi qanday afzallikka va kamchiliklarga ega?

10. Optimal filtrlashning determinantli usuli haqida tushuntirish bering.

11. Optimal RLS adaptiv usulidan foydalanilganda qanday amallarni bajarish kerak bo'ladi?

12. LMS va RLS algoritmlarini bir-biri bilan taqqoslang, ular nisbatan qanday afzallik va kamchiliklarga ega?

13. Optimal filtrlashda eksponenta qonuni bilan unutish usulidan qanday maqsadda foydalaniladi?

14. Identifikatsiyalash deaganda qanday jarayonni tushunasiz va u adaptiv filtrlar yordamida qanday amalga oshirilishi mumkin?

15. Adaptiv filtr yordamida chiziqli bashoratlash qurilmasi strukturaviy sxemasini chizing va uning ishlash prinsipini tushuntiring.

16. Adaptiv filtr yordamida shovqinni bartaraf etish usuli haqida tushuntirish bering.

17. Qanday hollarda ekvalayzerlardan foydalaniladi?

18. Adaptiv filtr yordamida aloqa kanali chastotalar xarakteristikasini to'g'rilashdan nima maqsadda foydalaniladi?

19. Adaptiv filtr yordamida aks-sado signalini yo'qotish tizimi strukturaviy sxemasini chizing va ishlash prinsipini aytib bering.

ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Рабинер Л., Гоулд. Теория и применение цифровой обработки сигналов. Под ред. / Ю.Н. Александрова. – М.: Издательство МИР, 1978.
2. Голд Б., Рейдер. Цифровая обработка сигналов. Под ред. / А.М. Трахтмана – М.: Сов Радио, 1973.
3. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов – М.: Бином-ПРЕСС, 2006.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Питер, 2007,
5. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов – М.: Радио и связь, 2004.
6. Гадзиковский В.И. Проектирование цифровых фильтров – М.: Радио и связь, 2008.
7. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов – М.: Радио и связь, 1990.
8. Оппенгейм А.В., Шеффер Р.В. Цифровая обработка сигналов – М.: Связь, 1979.
9. Скляр Бернард. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение – М.: Издательский дом Вильямс, 2007.
10. Прокс Дж. Цифровая связь – М.: Радио и связь, 2002.
11. Юкио Сато. Обработка сигналов. Первое знакомство – М.: Изд. Дом «Додэка-XXI».
12. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы – М.: Радио и связь, 2002.
13. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы – М.: Высшая школа, 2000.
14. Абдуазизов А. Электр алоқа назарияси – Т.: Фан ва технологиялар, 2011.
15. Карташашев В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров – М.: Высшая школа, 1982.
16. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: Практический подход. 2-ое изд.: Изд. дом Вильямс, 2004.
17. Степанов А.В., Матвеев С.А. Методы компьютерной обработки сигналов систем радиосвязи – М.: Солон-пресс, 2003.
18. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов – СПб.: Политехника, 1998.
19. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования – СПб.: Политехника, 1999.
20. Мала С. Вейвлеты в обработке сигналов – М.: Мир, 2005.

MUNDARIJA

Amonjon Abdumadjidovich Abduazizov
Ismail Rustamovich Faziljanov
Yarashbek Toxirbaevich Yusupov

SIGNALLARGA RAQAMLI ISHLOV BERISH

O'QUV QO'LLANMA

O'quv qo'llanma TATUning
Ilmiy-uslubiy Kengashi tomonidan
chop etishga tavsiya etilgan
2012 yil 29 yanvar 47-sonli bayonnoma.

Ma'sul muharrir: A.A. Abduazizov
Muharrir: S.X. Abdullayeva

Bichimi 60×84 1/16. Bosma tabog'i 8.3
Adadi 50. Buyurtma №145.
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
"Nashr-matbaa" bo'limida chop etildi.
Toshkent sh. Amir Temur ko'chasi 108-uy.